КЫРГЫЗ РЕСПУБЛИКАСЫНЫН ИЛИМ ЖАНА БИЛИМ
МИНИСТРЛИГИ
Ош мамлекеттик университети
Математика жана маалыматтык технологиялар факультети
Алгебра жана геометрия кафедрасы

ТУРСУНОВ Д.А.

ДИСКРЕТТИК МАТЕМАТИКАНЫН НЕГИЗДЕРИ

Окуу колдонмо

Ош-2009

алмаштары, синонимдер пайда болуп жана

умча оттеноктор туюнтулат.
ия же функциональдык транспозиция
ын же сөздүн негизинин алма-
паниям экинчи бир сөз түркүмүнө
рубежья. Сө өрүнүн функциясын-
родные студенче жүзүнө ашыры-
мена. Создано творческое объединение алапат.
и команда КВН. В институте обучаются 2 мас
кандидатов в мастера спорта по борьбе “Куреш”.
своя кафедра “Физвоспитание”. Для преподавателей, сотрудников и студентов имеется своя база отдыха в Самате, Белесе, Тоо-жайлоо и на берегу Кайра-Кума Республики Таджикистан. В тираж выходят вузовский сборник “Труды СГЭИ” и студенческие многотиражки. У института есть свой флаг, гимн и герб. 2005 год стал для института поистине знаменательным. Готовясь к 10-летию института, мы объявили конкурсы: на лучшие сочинение песен об институте, лучшую эмблему института, лучшую студенческую группу по специальностям. Важное значение придается воспитанию студентов через учебный процесс, через личность самого преподавателя. В целом в институте благоприятная атмосфера, доброжелательность, помощь преподавателей, ме-

КЫРГЫЗ РЕСПУБЛИКАСЫНЫН ИЛИМ ЖАНА БИЛИМ
МИНИСТРЛИГИ

Ош мамлекеттик университети

Математика жана маалыматтык технологиялар факультети

Алгебра жана геометрия кафедрасы

ТУРСУНОВ Д.А.

ДИСКРЕТТИК МАТЕМАТИКАНЫН НЕГИЗДЕРИ

Окуу колдонмо

Ош-2009

УДК 519.1(075.8)
ББК 22.176(2 Ки)
Т-88

Окуу колдонмосу Ош мамлекеттик университетинин Окумуштуулар кеңешинин чечими боюнча басмага сунушталган

Рецензенттер:
Ф.-м.и.д., профессор Сопуев А.С.
Ф.-м.и.к., доцент Асылбеков Т.Д. МИТ факультетинин Окуу методикалык кеңешинин төрагасы

Турсунов Д.А.
Т-88 Дискреттик математиканын негиздери/ ОшМУ.
-Ош:2009. 96 бет.

Окуу колдонмо университеттер үчүн түзүлгөн дискреттик математиканын негиздери курсунун жаңы программасына ылайык жазылды. Колдонмо «математика», «информатика», «колдонмо математика жана информатика», «физика», «ПОВТАС», «АСОИУ» адистиктери боюнча окуган 2, 3 курстун студенттери үчүн арналган.

Окуу колдонмону мектептин мугалимдери да, жогорку класстардын окуучулары да кеңири колдоно алышат.

УДК 519.1(075.8)
ББК 22.176(2 Ки)

Мазмуну

ШАРТТУУ БЕЛГИЛӨӨЛӨР

∀ - каалагандай, бардык

∃ - жашайт, табылат

! - жалгыз

⇒ - келип чыгат

∧ - жана

∨ - же

⇔ - зарыл жана жетиштүү

Киришүү

Дискрет - үзгүлтүксүздүк түшүнүгүнө карама-каршы болгон түшүнүк. Эсептөө техникаларынын өнүгүшү дискреттик математиканын мүмкүнчүлүктөрүн кеңейтүү менен ага жаңы маселелердин булагы болуп кызмат кылууда. Жалпылап айтканда дискреттик математика өз ичине сандар теориясын, математикалык логиканын, комбинаториканын, графтар теориясынын, жалпы алгебранын түшүнүктөрүн камтыйт.

Окуу планына ылайык «математика», «информатика» адистиктери боюнча окуган студенттер 2-курста, «физика» адистиги боюнча окуган студенттер 3-курста «Дискреттик математиканын негиздерин», ал эми «математика», «информатика», «колдонмо математика жана информатика» адистиктери боюнча окуган студенттер 4-курста «Дискреттик математика» дисциплинасын окушат.

Мамлекеттик стандартка ылайык «дискреттик математиканын негиздери» аттуу дисциплина өз ичине төмөндөгүлөрдү камтыйт:

Көптүктөр, катыштар, математикалык логиканын негиздери, бульдун функциялары, комбинаториканын жана графтар теориясынын элементтери.

Окуу колдонмо мамлекеттик стандартка ылайык түзүлгөн. Ар бир түшүнүк өзүнчө глава болуп берилди.

Аталган адистиктер боюнча сырттан окуган студенттер да окуу колдонмосун ийгиликтүү пайдалана алышы үчүн материал жөнөкөй, жатык тилде баяндалып, мисалдар чыгарылыштары менен келтирилди.

Окуу колдонмодо тиешелүү практикалык сабактар үчүн мисал-маселелер сунушталган.

Окуу колдонмодо орун алган кемчиликтерди көрсөтүп анын сапатын жакшыртууга багытталган пикирлерин билгизген ф.-м.и.д., профессор Г.Матиевага жана ага окутуучу Г.Борбоевага чоң ыразычылыгымды билдирем.

I. Көптүктөр

§1.1. Көптүк түшүнүгү

Көптүк - математиканын алгачкы, фундаменталдык түшүнүктөрүнүн бири. Ошондуктан ага так аныктама берилбейт. Бирок көптүктүн маанисин баяндап, ага түшүндүрмө берүүгө болот. Көптүк катары студенттик тайпаны, дарактардын көптүгү болгон паркты мисал келтирсек болот.

Кандайдыр бир жалпы касиетке ээ болгон обьектилердин жыйындысы көптүк болот.

Көптүктү түзгөн обьектилер анын *элементтери* деп аталат. Көптүктүн элементтери ар түрдүү жана алар бири-биринен айрымаланышат. Мисалы: студенттик тайпа - көптүк, студенттер - анын элементтери.

Көптүктөр латын алфавитинин баш тамгалары $A, B, \ldots, Z$ менен, ал эми анын элементтери латын алфавитинин кичине тамгалары $a, b, \ldots, z$ менен белгиленет.

Эгерде a элементи A көптүгүнө таандык болсо, анда ал «$\in$» символу аркылуу $a\in A$ көрүнүшүндө жазылат. «$\in$» символунун тануусу «$\notin$», б.а. эгерде a элемент A көптүгүнө таандык болбосо, $a\notin A$ көрүнүшүндө жазылат («$\in$» - тиешелүү, таандык дегенди түшүндүрөт).

Эч кандай элементи болбогон көптүк бош көптүк деп аталат жана $\varnothing$ түрүндө белгиленет, $A=\varnothing$. Бош көптүк бирөө гана болот.

Көптүктүн элементтери фигуралык кашаага алынып жазылат: $A=\{a,в,c\}$. Эгерде көптүк чектелген болсо, анда ал элементтерин санап көрсөтүү менен жазылат. М: $A=\{1,2,3,4,5\}$.

Кээ бир көптүктөр бардык элементтерине тиешелүү болгон ~~мүнөздөөчү касиети~~ боюнча да жазылат. Эгерде $p(x)$ кандайдыр бир A көптүгүнүн бардык элементтерин мүнөздөөчү касиет болсо, анда A көптүгү

$A = \{x \mid p(x)\}$ көрүнүшүндө жазылат.

Мисалы: $B = \{2\kappa / \kappa \in Z\}$ - жуп бүтүн сандардын көптүгү.

Көптүктөрдү мүнөздүк касиети боюнча берүү айрыкча көптүктөрдүн үстүнөн амал жүргүзүүдө ыңгайлуу болот.

Кээ бир стандарттык негизги көптүктөр үчүн атайын белгилөөлөр кабыл алынган, мисалы: N, Z, Q, R, C *ж.б.у.с.* алар:

N – натуралдык сандардын көптүгү,

Z – бүтүн сандардын көптүгү,

Q – рационалдык сандардын көптүгү,

R – чыныгы (анык) сандардын көптүгү,

C – комплекстик сандардын көптүгү,

$C_{[a,b]}$ – [a,b] – сегментинде үзгүлтүксүз болгон функциялардын көптүгү.

Def. Эгерде A көптүгүнүн элементтери B көптүгүнө да тиешелүү болушса, анда A көптүгү B көптүгүнүн *камтылуучу көптүгү* деп аталат. $A \subset B$ деп белгиленет.

$$A \subset B \overset{def}{=} \{x \mid x \in A \Rightarrow x \in B\}.$$

Аныктоо боюнча $\forall A$ үчүн $\varnothing \subset A$. Камтылуучулук төмөнкүдөй касиеттерге ээ:

а) $\forall A$: $A \subset A$;

б) $\forall A, B, C$: $A \subset B \wedge B \subset C \Rightarrow A \subset C$;

в) $\forall A, B$: $A \subset B \wedge B \subset A \Rightarrow A = B$.

Def. Эгерде *A* көптүгү *B* көптүгүнө жана *B* көптүгү *A* көптүгүнө камтылуучу болсо, анда алар *барабар көптүктөр* деп аталат жана *A*=*B* деп белгиленет.

$$(A = B) \overset{def}{=} A \subset B \wedge B \subset A.$$

Def. Эгерде $A \subset B \wedge A \neq B$ болсо, анда *A* көптүгү *B* көптүгүнүн *өздүк камтылуучу* көптүгү деп аталат.

Def. Эгерде A $\wedge$ B көптүктөрүнүн арасында өз ара бир маанилүү тиешелештик орнотулса, анда алар эквиваленттүү деп аталышат, жана A~B деп белгиленет.

Чектүү көптүктөрдүн эквиваленттүүлүгү алардын бирдей сандагы элементтерден турарын түшүндүрөт. Ошондуктан бир да чектүү көптүк өзүнүн өздүк камтылуучусу менен эквиваленттүү боло албайт. Бирок чексиз көптүктөр өздөрүнүн өздүк камтылуучулары менен эквиваленттүү болуп калышы мүмкүн. Мисалы: A=N, $B=\{2n \mid n \in N\}$ болсо, A~B болот.

Def. Натуралдык сандардын көптүгүнө эквиваленттүү болгон көптүк *санаттык* көптүк деп аталат.

Def. Көптүктүн элементтеринин саны анын *кубаттуулугу* деп аталат. $m(A)$ же $|A|$ - белгиленет.

Натуралдык сандардын көптүгүнүн кубаттуулугу үчүн $|N| = N_0$ (алефнуль) кабыл алынган. Санаттык эмес көптүктөрдүн кубаттуулугу үчүн *c* кабыл алынган.

Мисал. $|Z| = N_0$, $|[0,1]| = c$.

Эгерде *A* жана *B* көптүктөрү эквиваленттүү болушса, анда алар бирдей кубаттуулукка ээ болушат, $|A| = |B|$.

Def. Эгерде A көптүгүнүн өзү менен бирдей кубаттуулукка ээ болгон өздүк камтылуучу көптүгү жок болсо, анда А чектүү деп аталат.

$$\forall B(B\subset A \wedge |B|=|A|)\Rightarrow(B=A).$$

Чектүү көптүк үчүн $|A|<\infty$ белгиси колдонулат. Калган көптүктөр чексиз деп аталат. Б.а. чексиз көптүк өзүнүн кандайдыр бир өздүк камтылуучу көптүгү менен бирдей кубаттуулукта болот.

$$\exists B\ \ B\subset A \wedge |B|=|A| \wedge B\neq A.$$

Чексиз көптүк үчүн $|A|=\infty$ белгиси колдонулат.

Мисал. $|N|=\infty$, себеби жуп натуралдык сандардын көптүгү N менен бирдей кубатуулукка ээ жана жуп натуралдык сандардын көптүгү N ге камтылуучу көптүк болот.

Текшерүүчү суроолор

1) Көптүккө эмне үчүн аныктама берилбейт?
2) «$\in$» - эмнени түшүндүрөт?
3) Кандай шарт орун алганда В, А га камтылуучу деп аталат?
4) Санаттык көптүк деген кандай көптүк?
5) Көптүктүн кубаттуулугу деген эмне?
6) Кандай эки көптүк барабар деп аталат?
7) Эквиваленттүү көптүктөр деген кандай көптүктөр?
8) Көптүктөрдү кантип салыштырабыз?
9) Санаттык эмес көптүккө аныктама берип, мисал келтиргиле.

Өз алдынча иштөө үчүн мисал-маселелер

1) Эгер $A=\{a,b,c,d\}$, $B=\{c,b\}$ болсо, анда $A\subset B$ болобу же $B\subset A$?
2) Эгер $A\subset B$ жана $B\subset C$ болсо, анда $A\subset C$ экендигин далилдегиле.

3) Эгер $A \subset B$ жана $B \subset A$ болсо, анда $A=B$ экендигин далилдегиле.

4) $A=[a,b]$, $B=(-\infty,0)$ көптүктөрү эквиваленттүү болушабы?

5) $A=[-1,1]$, $B=[2,10]$ көптүктөрү эквиваленттүү болушабы?

6) Асмандагы жылдыздардын көптүгү санаттык көптүк болобу?

7) Чыныгы сандардын көптүгүнүн кубаттуулугу эмнеге барабар?

8) $A \sim B \Leftrightarrow |A| = |B|$ экендигин далилдегиле.

9) $\mathfrak{R}$ сандардын көптүгү чексиз көптүк экендигин далилдегиле.

10) $C_{[0,1]}$ көптүгүнүн кубаттуулугун жана өздүк камтылуучу көптүгүн тапкыла.

§1.2. Көптүктөрдүн үстүнөн жүргүзүлүүчү амалдар

1) Биригүү амалы

Def. A жана B көптүктөрүнүн биригүүсү деп, A га же B га тиешелүү болгон элементтердин көптүгүн айтабыз, жана $A\cup B$ белгилейбиз.

$$A\cup B\overset{def}{\Leftrightarrow}\{x\mid x\in A\vee x\in B\}.$$

n даана көптүк үчүн аныктоону $\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i\overset{def}{\Leftrightarrow}\{x\mid x\in A_i\vee x\in A_j,i,j=\overline{1,n},i\neq j\}$ көрүнүшүндө жазууга болот.

2) Кесилишүү амалы

Def. A жана B көптүктөрүнүн кесилишүүсү деп, A га да жана B га да тиешелүү болгон элементтердин көптүгүн айтабыз, жана $A\cap B$ белгилейбиз.

$$A\cap B\overset{def}{\Leftrightarrow}\{x\mid x\in A\wedge x\in B\}.$$

n даана көптүк үчүн аныктоону $\bigcap\limits_{i=1}^{n}A_i\overset{def}{\Leftrightarrow}\{x\mid x\in A_i\wedge x\in A_j,i,j=\overline{1,n},i\neq j\}$ көрүнүшүндө жазууга болот.

3) Кемитүү амалы

Def. A көптүгүнө гана тиешелүү болуп, B көптүгүнө тиешелүү болбогон элементтерден турган көптүк A көптүгүнүн B көптүгүнөн болгон айырмасы деп аталат.

$$A\setminus B\overset{def}{\Leftrightarrow}\{x\mid x\in A\wedge x\notin B\},\ (A/B\overset{def}{\Leftrightarrow}\{x\mid x\in B\wedge x\notin A\}).$$

4) Симметриялык айырма амалы

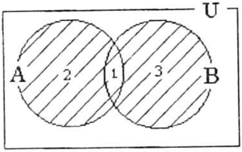
Def. B/A жана A/B көптүктөрүнүн биригүүсү A жана B көптүктөрүнүн симметриялык айырмасы деп аталат жана $A\Delta B$ белгиленет.

$$A\Delta B \overset{def}{\Leftrightarrow} (A\setminus B)\bigcup(B\setminus A).$$

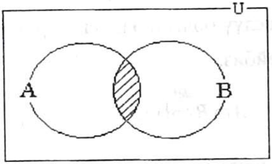
Def. Каралып жаткан бардык көптүктөрдү камтыган көптүк *универсалдык* көптүк деп аталат, жана u деп белгиленет.

Def. $\overline{A} \overset{def}{\Leftrightarrow} \{x \mid x\in u \wedge x\notin A\}$ - A көптүгүнүн универсалдык көптүккө чейинки толуктальшы же A көптүгүнүн толуктоочусу деп аталат.

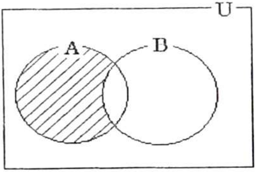
$A\cup B$



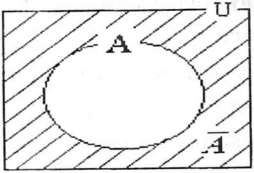
$A\cap B$



A\B



$\overline{A}$



Көптүктөрдүн үстүнөн жүргүзүлгөн жогорудагы амалдар төмөнкүдөй касиеттерге ээ:

Каалаган A, B, C көптүктөрү үчүн:

1) $A\cup A=A$ - биригүүнүн идемпотентүүлүгү;

2) $A\cap A=A$ - кесилишүнүн идемпотентүүлүгү;

3) $A\cup B=B\cup A$ – биригүнүн коммутативдүүлүгү;

4) $A\cap B=B\cap A$ - кесилишүнүн коммутативдүүлүгү;

5) $A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$ - биригүнүн ассоциативдүүлүгү;

6) $A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$ - кесилишүнүн ассоциативдүүлүгү;

7) $(A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C)$ – биригүнүн кесилиштирүүгө карата оң жактан дистрибутивдүүлүгү;

8) $A\cup(C\cap B) =(A\cup C)\cap(A\cup B)$ – биригүнүн кесилиштирүүгө карата сол жактан дистрибутивдүүлүгү;

9) $(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C)$ - кесилишүнү биригүгө карата оң жактан дистрибутивдүүлүгү;

10) $(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C)$ - кесилишүнү биригүгө карата сол жактан дистрибутивдүүлүгү;

12) $A\subset A\cup B \wedge B\subset A\cup B$, 13) $A\cap B\subset A \wedge A\cap B\subset B$

«Коммутатив» сөзү «commutatius» деген латын сөздүнөн алынган, кыргыз тилине которгондо «орун алмашуучу», «орун өзгөрүүчү» дегенди билдирет.

«Ассоциатив» сөзү «Assotiatio» деген латын сөзүнөн алынган, кыргыз тилине которгондо «топтоштуруу» дегенди билдирет.

Текшерүүчү суроолор

1. Көптүктүн кандай түрлөрү сизге белгилүү?
2. Үч көптүктүн биригүүсү деген эмне?
3. Беш көптүктүн кесилишүүсү деген эмне?
4. Биригүү амалы кандай касиеттерге ээ?
5. Эки көптүктүн симметриялык айырмасы деген эмне?

§1.3. Булеан түшүнүгү

Def. A көптүгүнүн бардык камтылуучу көптүктөрүн камтыган көптүк A көптүгүнүн *булеаны* деп аталат жана ал $Bul(A)$ менен белгиленет. Аныктоо боюнча $Bul(A)\overset{def}{=}\{X : X\subset A\}$.

$Bul(A)$дан алынган бардык элементтер үчүн A универсалдык көптүк болот, тагыраак айтканда ал эң кичине универсалдык көптүк болот. $Bul(A)$ көптүгүнө булеан деген ат, анын алгачкы изилдөөчүсү болгон англиялык математик, Джордж Бульдун ысмына коюлган.

Теорема. Булеандын кубаттуулугу 2^n ге барабар б.а. $|Bul(A)|=2^n$, n – A көптүгүнүн кубаттуулугу.

Мисал. A={a,b,c}көптүгү үчүн анын булеаны

$Bul(A)=\{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{b,c\}, \{a,b,c\}\}$,

$|Bul(A)| = 2^3=8$.

Текшерүүчү суроолор

1) Булеан деген эмнени түшүндүрөт?
2) Булеан түшүнүгүн математикага ким киргизген?
3) Булеандын кубаттуулугу эмнеге барабар?

Өз алдынча иштөө үчүн көнүгүүлөр

Теңдештиктерди далилдегиле жана Эйлер-Венндин диаграммасында сүрөттөгүлө (1-8):

1) $B\cup(B/A)=A\cup B$; 2) $A\backslash(A\backslash B)=A\cap B$;

3) $B\cap(A\backslash B)=\varnothing$; 4)$A\backslash(B\cup C)=(A\backslash B)\cap(A\backslash C)$;

5) $A\backslash(B\cap C)=(A\backslash B)\cup(A\backslash C)$; 6) $A\backslash B=A\backslash(A\cap B)$;

7) $A\cup B= A\cup(A/B)$; 8) $(A\cup B)\setminus C=(A\setminus C)\cup(B\setminus C)$.

9) Теңдемелердин системасын чыгаргыла

$\begin{cases} A\cap X = B \\ A\cup X = C \end{cases}$, мында A, B, C көптүктөрү берилген жана $B\subset A\subset C$.

10) Теңдемелердин системасын чыгаргыла

$\begin{cases} A\setminus X = B \\ X\setminus A = C \end{cases}$, мында A, B, C көптүктөрү берилген жана $B\subset A$, $A\cap C=\varnothing$.

11) Теңдемелердин системасын чыгаргыла

$\begin{cases} A\setminus X = B \\ A\cup X = C \end{cases}$, мында A, B, C көптүктөрү берилген жана $B\subset A\subset C$.

A, B, C көптүктөрү кандай болгондоүчүн 12),13),14) теңдемелердин системасы чечимге ээ болот:

12) $\begin{cases} A\cup X = B\cap X \\ A\cap X = C\cup X \end{cases}$; 13) $\begin{cases} A\setminus X = X\setminus B \\ X\setminus A = C\setminus X \end{cases}$; 14) $\begin{cases} A\cap X = B\setminus X \\ C\cup X = X\setminus A \end{cases}$.

Көптүктөрдүн булеанын жана булеандын кубаттуулугун аныктагыла (15-17):

15) $A=\{1,2,3,6,8,9\}$; 16) $A=\{a,b,c,d\}$; 17) $A=\{a,b,1,2,0\}$.

Көптүктөрдүн эквиваленттүү экендигин далилдегиле жана алардын кубаттуулугун тапкыла (18-23):

18) $A=\{a,b,c,d\}$, $B=\{0,-1,-4,6\}$;19) $A=N$, $B=Z$;

20) $A=[0,1]$, $B=[-1,1]$; 21) $A=[a,b]$, $B=[c,d]$ $(a<b,\ c<d)$;

22) $A=R$, $B=(0,1)$; 23) $A=R$, $B=(a,b)$.

24) A жана B чектүү көптүктөр үчүн

$|A\cup B|= |A|+|B|-|A\cap B|$ барабардыгын далилдегиле.

25) Каалагандай көптүк өзүнүн камтылуучу көптүктөрүнүн биригүүсү экендигин далилдегиле.

§1.4. Көптүктөрдүн биригүүсүнүн кубаттуулугу

Жогоруда биз A көптүгүнүн кубаттуулугун $|A|$ менен белгиледик.

Теорема. Эки көптүктүн биригүүсүнүн кубаттуулугу

$$|A\bigcup B|=|A|+|B|-|A\bigcap B|$$

формуласынын жардамында табылат.

Далилдөө. Чындыгында A жана B көптүктөрүнүн элементтеринин саны $|A|+|B|$ га барабар. Бирок бул жерде жалпы элементтер (A га да B га да таандык болгон элементтер, алардын саны $|A\bigcap B|$) эки жолудан эсептелинет, б.а. $|A|+|B|=|A\bigcup B|+|A\bigcap B|$ барабардыгы орун алат. Бул жерден жогорудагы формула келип чыгат.

Бул формуланы пайдаланып каалаган сандагы көптүктөрдүн биригүүсүнүн кубаттуулугун табууга болот. Мисалы, үч көптүктүн биригүүсүнүн кубаттуулугун табалы:

$$|A\bigcup B\bigcup C|=|A\bigcup(B\bigcup C)|=|A|+|B\bigcup C|-|A\bigcap(B\bigcup C)|=|A|+|B|+|C|-|B\bigcap C|-$$
$$-|(A\bigcap B)\bigcup(A\bigcap C)|=|A|+|B|+|C|-|B\bigcap C|-|A\bigcap B|-|A\bigcap C|+|A\bigcap B\bigcap C|.$$

Мисал. 1)Группада 20 студент бар. Алардын 8 алгебра кружогуна, 7 информатика кружогуна катышышат, 6 студент эч бир кружокко катышпайт.

а) Канча студент математика жана информатика кружогуна катышат?

б) Канча студент бир гана математика кружогуна катышат?

Чыгаруу. A – алгебра кружогуна катыша турган студенттердин көптүгү, $И$ – информатика кружогуна катыша турган студенттердин көптүгү, $A\cap И$ алгебра жана информатика кружогуна катыша турган студенттердин көптүгү болсун. Анда $|A\cup И| = 14 = |A| + |И| - |A\cap И|$, мында $|A| = 8, |И| = 7$. Демек, $|A\cap И| = 1$. Жооп: 1 студент математика жана информатика кружогуна катышат, $|A| - |A\cap И| = 8 - 1 = 7$ студент бир гана математика кружогуна катышат.

Теорема. Эгерде $A_1, A_2, \ldots, A_n$ – көптүктөр болсо, анда

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum_{i=1}^{n}|A_i| - \{|A_1\cap A_2| + |A_1\cap A_3| + \ldots + |A_{n-1}\cap A_n|\} +$$

$$+ \{|A_1\cap A_2\cap A_3| + |A_1\cap A_2\cap A_4| + \ldots + |A_{n-2}\cap A_{n-1}\cap A_n|\} - \ldots + (-1)^{n-1}\left|\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right|$$

барабардыгы орун алат.

Бул теореманы математикалык индукция принциби менен далилдөө окурманга сунушталат.

Өз алдынча иштөө үчүн көнүгүүлөр

Барабардыктарды далилдегиле (1-6)

1) $(A\cup B)\setminus B=A\setminus B$,
2) $A\cap(B\cup C)=A\setminus(A\setminus B)\cap(A\setminus C)$,
3) $(A\setminus B)\cap C=(A\cap C)\setminus(B\cap C)$,
4) $A\cap B\cap C=A\setminus(A\setminus(B\cap C))$,
5) $(A\cap C)\setminus B=(A\cap C)\setminus(B\cap C)$,
6) $(A\setminus B)\cup(A\setminus C)=A\setminus(B\cap C)$.

7) $A\setminus B=\varnothing$ барабардыгынын орун алышы үчүн $A\cap B=A$ барабардыгынын орун алышы зарыл жана жетиштүү экендигин далилдегиле.

8) Экскурсияга жетинчи жана тогузунчу класстар чыкты. Алардын бардыгы же манасчылардын галстугунда же семетейчилердин галстугунда. Эркек балдар 16, манасчылар 24

болду. Семетейчилер канча болсо ошончо манасчы эркек балдар болду. Экскурссияга канча окуучу чыккан?

9)Группада 35 студент бар. Алардын 20сы математика кружогуна, 11и информатика кружогуна катышышат, 10 студент эч бир кружокко катышпайт.

а) Канча студент математика жана информатика кружогуна катышат?

б) Канча студент бир гана математика кружогуна катышат?

10) 100 студенттин ичинен 28 – англис тилин, 30 – немец тилин, 42 – француз тилин, 8 – англис жана немец тилдерин, 10 – англис жана француз тилдерин, 5 – немец жана француз тилдерин, бардык үч тилди 3 студент билет.

а) Канча студент бул үч тилдин бирөөсүн да билбейт?

б) Канча студент англис (француз, немец) тилин гана билет?

11) Студенттердин окурмандык кызыгууларын изилдөөдө төмөндөгүдөй жыйынтык алынды: студенттердин 60% - «Нур» гезитин, 50% - «Агым» гезитин, 50% - «Ош парк» гезитин, 30% - «Нур» жана «Агым» гезиттерин, 20% - «Агым» жана «Ош парк» гезиттерин, 40% - «Нур» жана «Ош парк» гезиттерин, 10% - «Нур», «Агым» жана «Ош парк» гезиттерин окушат экен. Студенттердин канча пайызы

а) Бул гезиттердин бирөөсүн да окубайт?

б) Гезиттердин экөөсүн гана окуйт?

в) Гезиттердин жок дегенде экөөсүн окуйт?

12) Университеттин бир кафедрасында 13 адам иштейт, алардын ар бири жок дегенде бир чет тилин (англис, француз, немец) билишет. 10 адам англис тилин, 7си немец тилин, 6су француз

тилин, 5өө англис жана немец тилдерин, 4өө англис жана француз тилдерин, 3өө немец жана француз тилдерин билишет.

а) Канча адам бардык үч тилди билет?

б) Канча адам эки тилди гана билет?

в) Канча адам бир гана англис тилин билет?

13) 70 адамдан сураганда алардын 45и орус тилин, 29у кыргыз тилин, 9у орус жана кыргыз тилдерин биле тургандыктары аныкталды. Суралгандардын канчоосу бул эки тилди билбейт?

14) Группада 70 студент бар. Алардын 45и орус тилин, 52си кыргыз тилин, 31и өзбек тилин, 28и орус жана өзбек тилдерин, 16сы орус жана кыргыз тилдерин, 20сы кыргыз жана өзбек тилдерин, 8и бул үч тилди тең билет.

а) Группада канча студент бул үч тилдин бирөөсүн да билбейт?

б) Эки гана тилди билген студенттердин саны канча?

в) Кыргыз тилин гана билген студенттердин саны канча?

15) 2 ИГ группасынын ар бир студенти жок дегенде бир чет тилин (англис, француз, немец) билет. Студенттердин 6 оосу англис тилин, 6 оосу немец тилин, 7 өөсү француз тилин, 4 өөсү англис жана немец тилдерин, 3 өөсү немец жана француз тилдерин, 2 өө француз жана англис тилдерин, ал эми 1 студент үч тилди билет.

а) 2 ИГ группасында канча студент бар?

б) Англис тилин гана билген студенттердин саны канча?

в) Эки тилди гана билген студенттердин саны канча?

II. Катыштар

§2.1. Көптүктөрдүн түз көбөйтүндүсү

a жана b обьектилерине иреттелген жана иреттелбеген түгөйлөр деп аталуучу жаңы обьектилерди тиешелештикке коюу мүмкүн. a, b лардан куралган иреттелбеген түгөй – $\{a,b\}$ көптүгү болуп эсептелет. Ал элементтеринин ээлеген ордунан көз каранды болбойт, б.а. каалаган a, b үчүн $\{a,b\}=\{b,a\}$ болот. Ал эми a, b лардан куралган иреттелген түгөй $<a,b>$ деп белгиленет. Ал $<a,b>=<c,d>\Leftrightarrow a=c \wedge b=d$ (б.а. тиешелеш обьектилери барабар болгондо жана ушул учурда гана, барабар болуу) касиети менен мүнөздөлөт. a обьектиси $<a,b>$ иреттелген түгөйүнүн биринчи компонентасы, ал эми b экинчи компонентасы деп аталат. Жогорудагы мүнөздөөчү касиетке таянсак, анда $<a,b>=<b,a>$ барабардыгы $a=b$ болгондо гана орун алат.

Def. Биринчи компонентасы A көптүгүнөн, экинчи компонентасы B көптүгүнөн алынган бардык түгөйлөрдүн көптүгүн А жана В көптүктөрүнүн *түз көбөйтүндүсү* деп аталат жана $A\times B$ белгиленет.

$$A\times B \overset{def}{\Leftrightarrow} \{\langle a,b\rangle \mid a\in A\wedge b\in B\}.$$

Көптүктөрдүн түз көбөйтүндү амалын математикага француз окумуштуусу Рене Декарт кийирген. Ошондуктан айрым адабияттарда бул амал Декарттык көбөйтүндү деп жазылган.

Мисал: а) $A=\{1,2\}$ $B=\{2,3\}$ $\Rightarrow A\times B=\{\langle 1,2\rangle,\langle 1,3\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 2,3\rangle\}$,

$A=\{1,2\}$ $B=\{2,3\}$ $\Rightarrow B\times A=\{\langle 2,1\rangle,\langle 3,1\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 3,2\rangle\}$;

б) $A = \{a,b,c\}$ $B = \{1,3\} \Rightarrow A \times B = \{\langle a,1\rangle, \langle a,3\rangle, \langle b,1\rangle, \langle b,3\rangle, \langle c,1\rangle, \langle c,3\rangle\}$,

$B \times A = \{\langle 1,a\rangle, \langle 3,a\rangle, \langle 1,b\rangle, \langle 3,b\rangle, \langle 1,c\rangle, \langle 3,c\rangle\}$.

Мисалдардан көрүнүп тургандай, каалаган А жана В көптүктөрүнүн түз көбөйтүндүсү коммутативдүүлүк касиетке ээ эмес: $A \times B \neq B \times A$.

Def. Эгерде $A = B$ болсо, анда $A \times A -$ A көптүгүнүн *декарттык квадраты* деп аталат, жана A^2 белгиленет. $A^2 \overset{def}{=} A \times A$.

Def. $< x,x >$ түрүндөгү $(x \in A)$ бардык жуптардын көптүгү A көптүгүнүн декарттык квадратынын *диагоналы* деп аталат жана D_A же d_A түрүндө белгиленет.

$$D_A \overset{def}{\Leftrightarrow} \{< x,x > | \; x \in A\}.$$

Иреттелген түгөйлөрдүн жалпыланышы n обьектиден куралган кортеж (иреттелген n - дик) түшүнүгү болуп эсептелет. $a_1, a_2, ..., a_n$ обьектилеринен куралган кортеж $< a_1, a_2, ..., a_n >$ деп белгиленет жана төмөнкүчө мүнөздөлөт.

Def. Эки $< a_1, a_2, ..., a_n >$ жана $< b_1, b_2, ..., b_n >$ кортеждери $a_1 = b_1$, $a_2 = b_2, ..., a_n = b_n$ болгон учурда гана барабар деп аталышат, б.а.

$$< a_1, a_2, ..., a_n > = < b_1, b_2, ..., b_n > \overset{def}{\Leftrightarrow} \forall j : a_j = b_j.$$

Эки көптүктүн түз көбөйтүндүсүнүн аныктоосунан пайдаланып, $A_1, A_2, ..., A_n$ көптүктөрүнүн түз көбөйтүндүсү үчүн төмөндөгүдөй аныктоо беребиз:

Def. $A_1, A_2, ..., A_n$ көптүктөрүнүн түз көбөйтүндүсү деп, биринчи компонентасы A_1 ден, 2-чи компонентасы A_2 ден, …, n-чи компонентасы A_n ден алынып түзүлгөн, узундугу n ге барабар болгон бардык кортеждердин көптүгүн айтабыз.

$A_1, A_2, ..., A_n$ көптүктөрүнүн түз көбөйтүндүсү $A_1 \times A_2 \times ... \times A_n$ болуп белгиленет. Ошентип аныктоо боюнча

$$A_1 \times A_2 \times ... \times A_n \overset{def}{\Leftrightarrow} \{< x_1, x_2, ..., x_n >| \, x_i \in A_i, \, i = \overline{1,n}\}.$$

Мисал. A={1,2}, B={a,b}, C={-5,6}болсо A×B×C, (A×B)×C, A×(B×C) ларды тапкыла.

Чыгаруу.

A×B×C={<1,a,-5>,<1,a,6>, <1,b,-5>, <1,b,6>, <2,a,-5>, <2,a,6>, <2,b,-5>,<2,b,6>},

(A×B)×C={<<1,a>,-5>,<<1,a>,6>, <<1,b>,-5>, <<1,b>,6>, <<2,a>,-5>, <<2,a>,6>, <<2,b>,-5>,<<2,b>,6>},

A×(B×C)={<1,<a,-5>>,<1,<a,6>>, <1,<b,-5>>, <1,<b,6>>, <2,<a,-5>>, <2,<a,6>>, <2,<b,-5>>,<2,<b,6>>}.

Мисалдан A×B×C≠(A×B)×C≠A×(B×C) келип чыгат. Демек, көптүктөрдүн түз көбөйтүндү амалы ассоциативдүүлүк касиетине да ээ эмес экен.

Эгерде $|A|$=n, $|B|$=m, |C|=p болсо, анда $|A$×B×C|=n*m*p болот.

$A_1 \times A_2$ көптүгүнүн элементтери иреттелген түгөйлөр болот, $A_1 \times A_2 \times A_3$ көптүгүнүн элементтери үчтүктөр, $A_1 \times A_2 \times A_3 \times A_4$ түн элементтери төрттүктөр ж.б. деп аташат. Эгерде $A_1 = A_2 = \ldots = A_n = A$ болуп калса $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$ түз көбөйтүндү A^n деп белгилөө жана аны Aнын n-чи түз даражасы деп атоо ыңгайлуу болот. Макулдашуу боюнча:

$$A^n \overset{def}{=} \underbrace{A \times A \times ... \times A}_{n-\text{жолу}} = \{< x_1, x_2, ..., x_n >| \, x_i \in A, \, i = \overline{1,n}\}.$$

Текшерүүчү суроолор

1) Иреттелген көптүк деп кандай көптүктү айтабыз?
2) Түз көбөйтүндү кандай аныкталат?
3) Түз көбөйтүндү амалы кандай касиеттерге ээ эмес?
4) Декарттык квадрат деген эмне?

Өз алдынча иштөө үчүн мисалдар

1) Эгер $A=\{a,b\}$, $B=\{a,b,c\}$ болсо, $A\times B$ жана $B\times A$ көптүктөрүнүн элементтерин көрсөткүлө.

2) Эгер $A=[0,1)$, $B=(0,1)\cup[23]$ болсо, $A\times B$ көптүгүн декарттык тегиздикте сүрөттөгүлө.

3) $A\times B$ жана $B\times A$ көптүктөрүнүн элементтерин тапкыла:

а) $A=\{1,2\}$, $B=\{1,3,4\}$; б) $A=\{3\}$, $B=\{1,2,3,4\}$.

Декарттык тегиздикте төмөнкү көптүктөрдү сүрөттөгүлө (4-11):

4) $[0,1]\times[0,1]$; 5) $[-1,1]\times[2,3]$;

6) $[0,1]\times(-\infty,2]$; 7) $[0,1]\times[2,\infty)$;

8) $[1,3]\times(-\infty,+\infty)$; 9) $(-1,1]\times[2,3)$;

10) $[0,\infty)\times\{2,3\}$; 11) $(-\infty,+\infty)\times[2,3]$;

Каалагандай X, Y, Z, W көптүктөрү үчүн төмөндөгү барабардыктардын орун алышын далилдегиле (12-19):

12) $(X\cup Y)\times Z=(X\times Z)\cup(Y\times Z)$; 13) $(X\cap Y)\times Z=(X\times Z)\cap(Y\times Z)$;

14) $(X\backslash Y)\times Z=(X\times Z)\backslash(Y\times Z)$; 15) $X\subset Y\Rightarrow X\times Z\subset Y\times Z$;

16) $X\times Y=\varnothing\Leftrightarrow X=\varnothing \vee Y=\varnothing$;

17) $X\cup Y\subset Z\Rightarrow X\times Y=(X\times Z)\cap(Z\times Y)$;

18) $(X\times Y)\cup(Y\times X)=Z\times Z\Rightarrow X=Y=Z$;

19) $(X\cap Y)\times(Z\cap W)=(X\times Z)\cap(Y\times W)$.

20) Эгер $A=\{1,2,3,4,5\}$, $B=\{a,b,c\}$ болсо, A^2, B^2, D_A, D_B көптүктөрүнүн элементтерин көрсөткүлө.

21) $A\times B\neq B\times A$, $A\times(B\times C)\neq(A\times B)\times C$ барабарсыздыктары орун ала тургандай A, B, C көптүктөрүнүн жашай тургандыгын далилдегиле.

22) Эгер A, $B\neq\varnothing$, $(A\times B)\cup(B\times A)=(C\times D)$ болсо, анда $A=B=C=D$ экендигин далилдегиле.

23) $A\subset B \Rightarrow A\times C\subset B\times C$.

24) $A\cup B\subset C\Rightarrow A\times B=(A\times B)\cap(C\times B)$.

25) $(A\times B)\cup(B\times A)=C\times C\Rightarrow A=B=C$.

26) Эгер $|A_1|=n_1$, $|A_2|=n_2,\ldots,|A_k|=n_k$ болсо, анда $|A_1\times A_2\times\ldots\times A_k|=n_1\cdot n_2\cdot\ \ldots\cdot n_k$ экендигин далилдегиле.

§2.2. Бинардык катыштар

Бинардык катыш түшүнүгү математикадагы алгачкы фундаменталдык түшүнүктөрдүн бири. Математиканын көпчүлүк маселелеринде эки a жана b обьекттеринин (эки сан, эки вектор, эки функция ж.б.у.с.) арасындагы катыштар каралат. Эгерде a нын b га болгон катышын ρ менен белгилесек, анда a нын b га болгон катышы берилген деп аталат, жана ал $a\rho b$ көрүнүшүндө жазылат. Математикада көп катыштардын аттары жана белгилеништери бар. Мисалы, a b га барабар, барабар эмес, кичине, бөлүнүнөт, параллель, перпендикулярдуу болгон катыштар тиешелүү түрдө төмөндөгүчө белгиленет:

$$a = b,\ a \neq b,\ a < b,\ a \vdots b,\ a \parallel b,\ a \perp b.$$

Def. A жана B көптүктөрүндө аныкталган бинардык катыш деп, A×B түз көбөйтүндүсүнүн каалаган камтылуучу көптүгүн түшүнөбүз.

Ошентип, ρ - A, B көптүктөрүндө аныкталган бинардык катыш дегенибиз $\rho \subset A\times B$ камтылуусу менен тең күчтүү. Бирок $\rho=\varnothing$ болуп калган тривиалдык учур биз үчүн керексиз, ошондуктан мындан ары дайыма $\rho\neq\varnothing$ деп эсептейбиз. Бул макулдашуу боюнча ρ 1-компонентасы A дан, ал эми 2-компонентасы B дан алынган кандайдыр бир <a,b> иреттелген түгөйүнөн турат. Эгер <a,b> түгөйү ρ го таандык болсо, анда аны кыскача aρb деп жазуу жана «a жана b ρ катышында» деп окуу кабыл алынган. Ошентип ,

$a\rho b \overset{def}{\Leftrightarrow} a \in A \wedge b \in B \wedge < a, b > \in \rho$ тең күчтүүлүгү орун алат.

Мисал. 1) Эгер A=N жана B – бардык бош эмес чектүү көптүктөрдүн көптүгү десек, анда ρ= «элементтеринин саны болот» катышы бардык $<n,\{a_1,a_2,\dots,a_n\}>$ иреттелген түгөйлөрүнөн турат; бул жерде n+1 $\{a_1,a_2,\dots,a_n\}$ге ρ катышта болбойт.

2) Эгер $A=Z$, $B=N$ болсо жана ρ= «так бөлүнөт» катышы болсо, анда ал бардык $<ax,a>$ түгөйлөрүнүн саны үчүн a a+1 ге ρ катышында болбойт.

Def. ρ бинардык катышына кире турган түгөйлөрдүн биринчи компоненталарынан түзүлгөн көптүк ал бинардык катыштын аныкталуу аймагы деп аталат жана *Dom* ρ деп белгиленет.

Dom француз «Domain» сөзүнөн алыган «аймак», «район» деген маанини билдирет.

Def. ρ бинардык катышына кире турган түгөйлөрдүн экинчи компоненталарынан түзүлгөн көптүк ρ нун маанилеринин аймагы деп аталат жана *Im* ρ деп белгиленет.

Im дагы француз «Image» сөзүнөн алынган «элес» деген маанини берет.

Демек, аныктоо боюнча:

$$Dom\,\rho \overset{def}{\Leftrightarrow} \{x \mid \exists y : x\rho y\}, \quad \mathrm{Im}\ \rho \overset{def}{\Leftrightarrow} \{y \mid \exists x : x\rho y\}.$$

Мисал. Эгер $A=\{-1,3,5,7\}$, $B=\{0,2,4,6\}$ көптүктөрүндө $\rho=\{<-1,0>,<3,0>,<-1,4>,<7,6>,<3,6>\}$ бинардык катышы берилсе, ал үчүн *Dom* $\rho=\{-1,3,7\}$, ал эми *Im* $\rho=\{0,4,6\}$ болот.

Def. A, A көптүгүндө берилген бинардык катыш кыскача, A көптүгүндө берилген бинардык катыш деп аталат.

Эгерде $A\subset B$ болсо, анда A, B ларда берилген ар бир бинардык катыш B да берилген бинардык катыш болот.

Def. Эгерде $\forall x, y: x\rho y \leftrightarrow x\sigma y$ болсо, б.а. алар көптүктөр катарында барабар болушса, анда ρ жана σ бинардык катыштары барабар деп аталышат.

Def. $Dom\ \rho\cap Im\ \sigma$ кесилишинен ушундай бир b элементи табылып, ал үчүн $a\sigma b$ жана $b\rho c$ боло тургандай бардык $<a,c>$ түгөйлөрүнөн куралган бинардык катышты ρ жана σ бинардык катыштарынын композициясы деп айтабыз.

ρ, σ катыштарынын композициясы $\rho\circ\sigma$ болуп белгиленет.

Аныктоо боюнча:

$$\rho\circ\sigma \overset{def}{\Leftrightarrow} \{<a,c>\in Dom\,\rho\times \operatorname{Im}\sigma \mid \exists b\in Dom\rho\bigcap \operatorname{Im}\sigma : a\sigma b\wedge b\rho c\}.$$

<u>Мисал</u>. Эгер $\rho=\{<0,2>,<1,2>,<3,5>,<-2,-4>,<5,7>\}$, $\sigma=\{<4,0>,<-5,1>,<-3,0>,<-2,1>,<5,5>\}$ деген бинардык катыштардын композициясын табалы. Аныктоо боюнча алардын композициясы $\rho\circ\sigma=\{<4,2>,<-5,2>,<-3,2>,<-2,2>,<5,7>\}$ болот.

Аныктоодон көрүнүп тургандай $\rho\circ\sigma$ композициясы ар дайым $Dom\ \rho$ жана $Im\ \sigma$ көптүктөрүндө аныкталган болот. Бирок, $\rho\circ\sigma$ бош көптүк болуп калышы да мүмкүн.

Мисалы, $\rho=\{<-2,4>,<2,3>\}$, $\sigma=\{<4,0>,<-5,1>,<-3,0>,<-2,1>,<5,5>\}$ катыштары үчүн $\rho\circ\sigma$ көптүгү бош көптүк болот. Катыштын бош болгон учуру бизди кызыктырбайт. Ошондуктан төмөнкү аныктоону кабыл алабыз:

Def. Эгерде $Dom\,\rho \cap Im\,\sigma$ кесилиши бош эмес көптүк болсо, анда ρ жана σ бинардык катыштары *байланышкан катыштар* деп аталат.

Теорема. $\rho \circ \sigma$ композициясы бош эмес болушу үчүн ρ жана σ бинардык катыштары байланышкан катыштар болушу зарыл жана жетиштүү.

Def. $x\rho y$ боло тургандай ρ бинардык катышынын тескериси деп, бардык $<y,x>$ түгөйлөрүнүн көптүгүн айтабыз жана ал ρ^{-1} деп белгиленет.

Аныктоо боюнча

$$\rho^{-1} \overset{def}{\Leftrightarrow} \{<y,x>|\, x\rho y\} \text{ же } y\rho^{-1}x \overset{def}{\Leftrightarrow} x\rho y.$$

Мисал. $\rho=\{<-2,4>,<2,3>\}$ үчүн $\rho^{-1}=\{<4,-2>,<3,2>\}$ болот.

Каалаган ρ бинардык катышы үчүн $Dom\rho^{-1}=Im\rho$, $Im\rho^{-1}=Dom\rho$, $(\rho^{-1})^{-1}=\rho$, барабардыктары орун алат.

Бинардык катыштарды композициялоо ассоциативдүүлүк касиетке ээ, б.а. каалаган ρ, σ, τ бинардык катыштары үчүн $(\rho \circ \sigma) \circ \tau = \rho \circ (\sigma \circ \tau)$, жана

$\sigma \subset A \times B \wedge \ \rho \subset B \times C$: $(\rho \circ \sigma)^{-1} = \sigma^{-1} \circ \rho^{-1}$ барабардыктары орун алат.

Def. $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$ түз көбөйтүндүсүнүн каалаган камтылуучусун $A_1, A_2, \ldots, A_n$ көптүктөрүндө берилген катыш деп айтабыз.

$A_1, A_2, \ldots, A_n$ көптүктөрүндө берилген катыш n-ардык катыш деп да аталат. Демек, аныктоо боюнча *n*-ардык катыш узундугу n ге барабар болгон кандайдыр бир кортеждердин көптүгү болот. n-ардык катыш n=1 кезинде унардык, n=2, болгондо бинардык,

$n=3$ кезинде тернардык катыш деп аталат. Ар кандай n-ардык катыш үчүн n анын ардуулугу (рангы) деп аталат.

Def. $A^n = A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$ түз даражасынын камтылуучусу боло турган ар кандай катышты A көптүгүндө берилген n-ардык катыш деп айтабыз.

Мисал. 1) A көптүгүндө берилген ар кандай унардык катыш анын кандайдыр бир камтылуучусу болот.

2) Z, N, N көптүктөрүндө аныкталган ρ=«1-компонентасы 2-жана 3-компоненталарынын айырмасына барабар» тернардык катышы $\rho=\{<x,y,z>\in Z\times N\times N: x+\ z=y\}$ көптүгүнөн же ошого эле барабар $\rho=\{<y-z,y,z>:y,\ z\in N\}$көптүгүнөн турат.

Def. A көптүгүндөгү ρ катышынын өзүнө болгон композициясы катыштын *даражасы* деп аталат. $\rho^n = \underbrace{\rho \circ \ldots \circ \rho}_{n\ \text{жолу}}$ менен белгиленет.

Def. Эгерде $\rho \subset A \times B$ - болсо, анда $\rho \circ \rho^{-1}$катышы ρ нун *ядросу* деп аталат.

Текшерүүчү суроолор

1) Бинар деген эмнени түшүндүрөт?

2) Бинардык катыш деп кандай катышты айтабыз?

3) Тескери бинардык катыш кандай аныкталат?

4) Бинардык катыштардын композициясы кандай аныкталат?

5) n-ардык катыш кандай аныкталат?

Өз алдынча иштөө үчүн көнүгүүлөр

1. R, S, T – бинардык катыштары үчүн төмөндөгүлөрдү далилдегиле:

1.1. $(R \cap S)^{-1} = R^{-1} \cap S^{-1}$.

1.2. $(R \cup S)^{-1} = R^{-1} \cup S^{-1}$.

1.3. $R \circ (S \circ T) = (R \circ S) \circ T$.

1.4. $(R \circ S)^{-1} = S^{-1} \circ R^{-1}$.

1.5. $(R \cup S) \circ T = R \circ T \cup S \circ T$.

1.6. $R \circ (S \cup T) = (R \circ S) \cup (R \circ T)$.

1.7. $(R \cap S) \circ T \subset R \circ T \cap S \circ T$.

1.8. $R \circ (S \cap T) \subset R \circ S \cap R \circ T$.

1.9. $\mathrm{Dom}\,(R^{-1}) = \mathrm{Im}\,R$.

1.10. $\mathrm{Im}\,(R^{-1}) = \mathrm{Dom}\,R$.

1.11. $\mathrm{Dom}\,(R \circ S) \subset \mathrm{Dom}\,S$.

1.12. $\mathrm{Im}\,(R \circ S) \subset \mathrm{Im}\,R$.

1.13. $(R \setminus S)^{-1} = R^{-1} \setminus S^{-1}$.

2. R=AxB , S=BxA бинардык катыштар үчүн $R \circ S$, $S \circ R$, R^2 ,S^2 тарды аныктагыла:

2.1 $A = \{1, 3, 5\}$, $B = \{11, 13, 15\}$;

2.2. $A = \{2, 4, 6\}$, $B = \{12, 14, 16\}$;

2.3 $A = \{7, 9, 11\}$, $B = \{17, 19\}$;

2.4 $A = \{2, 3, 5\}$, $B = \{10, 13, 18\}$;

2.5 $A = \{3, 5, 7\}$, $B = \{1, 3, 5\}$;

2.6 $A = \{1, 4, 5\}$, $B = \{1, 4, 5\}$;

2.7 $A = \{11, 13, 14\}$, $B = \{11, 12, 13\}$;

2.8 $A = \{5, 6, 7\}$, $B = \{1, 11, 15\}$;

2.9 $A = \{10, 13, 15\}$, $B = \{1, 11, 15\}$;

§2.3 Бинардык катыштын айрым түрлөрү

1. Рефлексивдүүлүк катышы.

Def. Эгерде А көптүгүндө $x\rho y$ катышы берилип, $\forall x \in A$ үчүн $x\rho x$ аткарылса, анда ρ ну A дагы *рефлексивдүүлүк* катышы деп атайбыз.

Бир дагы $x \in A$ үчүн $x\rho x$ аткарылбаса, анда ρ ны A дагы *антирефлексивдүүлүк* катышы деп айтабыз.

Эгерде айрым $x \in A$ үчүн $x\rho x$ аткарылып, айрымдары үчүн аткарылбаса, анда ρ ну A дагы *рефлексивдүү эмес* катышы деп айтабыз.

Мисалдар. 1) Z – бүтүн сандардын көптүгүндөгү x-y айырмасынын m>0 бүтүн санына бөлүү катышы рефлексивдүү, себеби $\forall x \in Z$ ти алганыбызда $x - x = 0 / m$ аткарылат.

2) R – чыныгы сандардын көптүгүндөгү x<y кичине катышы – антирефлексивдүү, себеби $\forall x \in R$: x<x аткарылбайт.

3) N – натуралдык сандардын көптүгүндөгү «x жана y тин эң чоң жалпы бөлүүчүсү d га барабар» деген катыш рефлексивдүү эмес. Чындыгында, x=d үчүн (x,x)=(d,d)=d аткарылат, бирок x>d жана x<d маанилеринде (x,x)<d жана (x,x)>d келип чыгат.

2. Симметриялуулук катышы.

Def. А көптүгүндөгү $x\rho y$ ну канааттандыруучу ар бир x, y тер үчүн $y\rho x$ дагы аткарылса, анда ρ ну А дагы *симметриялуулук* катышы деп айтабыз.

А көптүгүндөгү $x\rho y$ну канааттандыруучу $\forall\, x \neq y$тер үчүн $y\rho x$ аткарылбаса (же $\forall x, y \in A: x\rho y \wedge y\rho x \Rightarrow x = y$), анда ρ ну А дагы *антисимметриялуулук* катышы деп айтабыз.

Мисалдар. 1)Жогорудагы (x,y)=d катышы симметриялуулук катышы болот, себеби (x,y)=d ны канааттандыруучу ар бир x,y маанилеринде (y,x)=d дагы аткарылат.

2) жогоруда каралган x<y катышы антисимметриялуулук катышы болот, себеби x<y ти канааттандыруучу x жана y тер y<x ти эч качан канааттандырбайт.

3. Транзитивдүүлүк катышы.

Def. А көптүгүндөгү $x\rho y$ну жана $y\rho z$ терди канаатандыруучу ар бир x, y, z тердин x жана z тери $x\rho z$ну канаатандырса, анда ρ ну А дагы *транзитивдүүлүк* катышы деп атайбыз.

А көптүгүндөгү $x\rho y$ну жана $y\rho z$ терди канаатандыруучу жок дегенде бир x, y, z тердин x жана z тери үчүн $x\rho z$ аткарылбаса, анда ρ ну А дагы *транзитивдүүлүк эмес* катышы деп атайбыз.

Мисалдар. 1) $x \vdots y$бөлүнүүчүлүк катышы транзитивдүү катыш, себеби $x \vdots y \wedge y \vdots z \Rightarrow x \vdots z$ орун алат.

2) Z – бүтүн сандардын көптүгүндө $x \neq y$катышы транзитивдүү эмес, себеби x=4, y=9, z=4 маанилерде $x \neq y$жана $y \neq z$ аткарылат, бирок $x \neq z$ аткарылбайт.

4. Эквиваленттүүлүк катышы.

Def. А көптүгүндө рефлексивдүү, симмметриялуу жана транзитивдүү болгон ρ катышын, А көптүгүндөгү *эквиваленттүүлүк* катышы деп айтабыз.

Мисалдар. 1) R деги x=y барабардык катышы.

2) Z деги «x-y айырма m>0 бүтүн санына бөлүнөт» катышы.

5. Тартип катышы.

Def. A көптүгүндө рефлексивдүү, антисимметриялуу жана транзитивдүү болгон ρ катышын, A көптүгүндөгү *тартип* (ирет) катышы деп айтабыз.

Мисал. R деги $x \le y$, $x \ge y$ катыштары тартип катышы болот.

Эгерде A көптүгүндө ρ эквиваленттүүлүк катышы аныкталган болсо, анда ρ катышы A көптүгүн өз ара кесилишпөөчү эквиваленттик класстарга бөлүктөйт. Бул класстардын көптүгү *фактор көптүк* деп аталат жана $A/_{\rho}$ менен белгиленет.

Мисалдар. 1)Мейли A – студенттик тайпа, ρ - «бир блокто отурушат» катышы болсун. Анда A көптүгүндө ρ катышы эквиваленттүүлүк катышы болот; чындыгында,

1) $a \in A,\ a\rho a$ (бир студент өзү менен бир блокта отурат),

2) $a,b \in A,\ a\rho b \Rightarrow b\rho a$ (эгер a менен b бир блокто отурушса, анда b дагы a менен бир блокто отурат),

3) $a,b,c \in A,\ a\rho b \wedge b\rho c \Rightarrow a\rho c$ (эгер a, b менен бир блокто отурса жана b, c менен бир блокто отурса, анда a c менен бир блокто отурат). Бул жерде класс – бир блокто отурган студенттердин көптүгү. Бир студент бир эле убакытта эки блокто отурушу мүмкүн эмес б.а. класстардын кесилиши бош көптүк. Эгерде B_k - k-блоктогу студенттер болсо, анда фактор көптүк $A/_{\rho} = \{B_1, B_2, ..., B_k\}$ болот.

2) Мейли А – тегиздиктеги нол эмес векторлордун көптүгү, ал эми S – «коллинеардуулук» катышы болсун. Анда А көптүгүндө S катышы эквиваленттүүлүк катышы болот, чындыгында

1) $\forall \vec{x} \in A,\ \vec{x} \| \vec{x}$,

2) $\forall \vec{x}, \vec{y} \in A,\ \vec{x} \parallel \vec{y} \Rightarrow \vec{y} \parallel \vec{x}$,

3) $\forall \vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in A : \vec{x} \parallel \vec{y} \wedge \vec{y} \parallel \vec{z} \Rightarrow \vec{x} \parallel \vec{z}$ аткарылат.

Эгер $K_{\bar{a}} - \bar{a}$ векторуна коллинеардуу векторлордун көптүгү деп алсак, анда фактор көптүк $A/_S = \{K_{\bar{x}}, K_{\bar{y}}, ...\}$ болот.

Текшерүүчү суроолор

1) Рефлексивдүүлүк катыш кандай катыш?
2) Симметриялуулук катышы кандай аныкталат?
3) Антисимметриялуулук катышы кандай аныкталат?
4) Транзитивдүүлүк катышы кандай аныкталат?
5) Тартип катышы кандай аныкталат?
6) Эквиваленттүүлүк катышы кандай аныкталат?
7) Фактор көптүк деген эмне?

Өз алдынча иштөө үчүн көнүгүүлөр

R, S, T – бинардык катыштары үчүн төмөндөгүлөрдү далилдегиле:

1.1. R, S – транзитивдүү $\Rightarrow$ $R \cup S, R \cap S, R^{-1}, S^{-1}$ – транзитивдүү.

1.2. R, S – рефлексивдүү $\Rightarrow$ $R \cup S, R \cap S, R^{-1}, S^{-1}$ – рефлексивдүү.

1.3. R, S - симметриялуу $\Rightarrow$ $R \cup S, R \cap S, R^{-1}, S^{-1}$ – симметриялуу.

1.4. R, S – эквиваленттүү $\Rightarrow$ $R \cup S$, $R \cap S$, R^{-1}, S^{-1} – эквиваленттүү.

1.5. R, S – антирефлексивдүү $\Rightarrow$ $R\cup S$, $R\cap S$, R^{-1}, S^{-1} – антирефлексивдүү.

1.6. R, S - антисимметриялуу $\Rightarrow$ $R\cup S$, $R\cap S$, R^{-1}, S^{-1} – антисимметриялуу.

2. Берилген А көптүгү жана андагы S бинардык катышынын жардамында A/S фактор-көптүгүн аныктагыла:

2.1) А – тегиздиктеги түз сызыктардын көптүгү, S – паралеллдүүлүк катышы.

2.2) А – тегиздиктеги туура төрт бурчтуктардын (үч бурчтуктардын) көптүгү, S – окшоштук катышы.

2.3) А – тегиздиктеги ромбдордун көптүгү, S – окшоштук катышы.

2.4) А – тегиздиктеги төрт бурчтуктардын көптүгү, S - «аянттары барабар» катышы.

2.5) А - тегиздиктеги айланалардын көптүгү, S - «радиустары барабар» катышы.

2.6) А - тегиздиктеги тегеректердин көптүгү, S - «аянттары барабар» катышы.

2.7) А - ОшМУдагы тайпалардын көптүгү, S- «студенттердин саны барабар» катышы.

2.8) А - ОшМУдагы тайпалардын көптүгү, S - «кыздардын саны барабар» катышы.

2.9) А – Бир факультеттеги студенттердин көптүгү, S – «бир тайпада окушат» катышы.

2.10) A - тегиздиктеги векторлордун көптүгү, S – барабардык катышы.

2.11)A=Z, S - «p жөнөкөй санына бөлгөндө калдыктары барабар» катышы.

§2.4. Чагылтуу

Функциялык катыш түшүнүгү. Бинардык катыштардын практикада кеңири учурай турган түрлөрүнүн бири функциялык катыштар болуп эсептелет.

Def. Эгерде А жана В көптүктөрүндө аныкталган ρ бинардык катышы оң жактан бир маанилүүлүк шартын канааттандырса, анда ρ бинардык катышы А дан В га карай *функциялык* катыш (ФК) деп аталат, б.а.

$$\forall x\in A,\ \forall y,\ y'\in B:\ x\rho y \wedge x\rho y' \Rightarrow y=y' \quad \text{болсо.}$$

Функциялык катыштар көбүнчө f, g, h, v, w, жана башка тамгалар менен белгиленет.

Эгерде f функциялык катыш үчүн xfy болсо, анда x аркылуу бир маанилүү түрдө аныкталган y элементи f тин x кезиндеги мааниси (же x тин f - элеси) деп аталат жана ал f(x) деп белгиленет.

Ошентип аныктоо боюнча $y=f(x) \Leftrightarrow xfy$ болот. Ал эми xfy боло турган x элементтери (жалпы учурда алар көп!) y тин f – алгачкы элеси деп аталат. Жалпы учурда аныкталгандай эле $\mathrm{Dom}f=\{x|\ \exists y{:}xfy\}$көптүгү f функциялык катышынын аныкталуу аймагы, ал эми $\mathrm{I}m\ f=\{y|\ \exists x:\ xfy\}$ көптүгү болсо анын маанилеринин аймагы деп аталат. Эгерде f функциялык катышы А, В көптүктөрүндө аныкталган болсо, анда $\mathrm{Dom}f\subset A$ жана $\mathrm{Im}f\subset B$ болот. Функциялык катыш кезинде Domf көптүгүнүн элементтери аргументтер деп аталат.

Мисалдар. 1) $A=\{-5,-4,-3,-2,3\}$, $B=\{a,b,c,d,e\}$ көптүктөрүндө аныкталган $\rho=\{<-5,a>,\ <-3,b>,\ <3,c>,\ <-2,d>,\ <-5,e>\}$катышы функционалдык катыш боло албайт, анткени бир эле -5 элементи түрдүү a жана е элементтерине ρ катышында болуп жатат.

2) Ошол эле А, В көптүктөрүндө аныкталган f={<-5,a>, <-3,b>, <3,c>, <-2,d> катышы функционалдык катыш болот. Анткени ага кирген түгөйлөр өздөрүнүн биринчи компоненталары менен бир маанилүү түрдө аныкталып жатат, бул функционалдык катыш үчүн $Domf=\{-5,-3,3,-2\}\subset A$ жана $Imf=\{a,b,c,d\}\subset$B болору көрүнүп турат.

Демек функциялык катышка кирген түгөйлөрдүн биринчи компоненталары кайталанбайт экен.

Функциялык катыштардын барабардыгы бинардык катыштардын барабардыгынын жекече учуру болуп эсептелет, б.а. f, g фунциялык катыштардын барабардыгы төмөнкүчө аныкталат:

$$f = g \overset{def}{\Leftrightarrow} Dom\, f = Dom\, g \wedge \forall x \in Dom\, f : f(x) = g(x).$$

Мисал. А={-5,-4,-3,-2,3}, В={a,b,c,d,e} көптүктөрүндө аныкталган f={<-5,a>, <-3,b>, <3,c>, <-2,d>} жана Х={-5,-2,-3,3}, У={a,b,c,d} көптүктөрүндө аныкталган g={<-5,a>, <3,c>, <-3,b>, <-2,d>} функциялык катыштар барабар болушат.

Функциялык катыштардын практикада өтө кеңири учурай турган түрү болуп чагылтуулар (функциялар) эсептелет.

Def. А, В көптүктөрүндө аныкталган жана аныкталуу аймагы А көптүгү менен дал келген f функциялык катыш А көптүгүн В көптүгүнө *чагылтуу* деп аталат.

А көптүгүн В көптүгүнө чагылтуу математикада

$f{:}A \to B$ же $A \xrightarrow{f} B$ болуп белгиленет.

Чагылтуунун түрлөрү. Математикада чагылтуунун 3 түрү кеңири учурайт, алар: иньективдүү, сюрьективдүү жана биективдүү чагылтуулар. Алардын аныктоолорун берели:

Def. f:X→Y чагылтуусу *иньективдүү* чагылтуу деп аталат, эгерде ал сол жактан бир маанилүүлүк шартына баш ийсе, б.а.

$$\forall x,x'\in X,\ \forall y\in \mathrm{Im}f:\ xfy \wedge x'fy \ \Rightarrow\ x=x' \qquad \text{болсо.}$$

f:X→Y чагылтуусу иньективдүү дегенди жалпы учурда «f Xти Yтин ичине чагылтат» деп окулат, ал эми жазганда $f: X\overset{in}{\to} Y$ көрүнүшүндө жазышат. («injection» латын сөзүнөн алынган, кыргыз тилинде «кийирүү» дегенди түшүндүрөт).

Мисалдар.

1) f:Z→Q, f(x)=x+7 чагылтуусу иньекция болот.

2) f:Z→Q, f(x)=ax^2 +b, $(a,b-const)$ чагылтуусу иньекция болбойт. Себеби f(1)= f(-1).

3) A={-5,-4,-3,-2,3}, B={a,b,c} көптүктөрүндө аныкталган каалаган f:A→B чагылтуусу да иньекция болбойт, анкени A көптүгүнүн элементтеринин саны B көптүгүнүн элементтеринин санынан көп.

Def. Эгерде f:X→Y чагылтуусуда маанилер аймагы Y көптүгү менен дал келсе б.а. Imf=Y болсо, анда чагылтуу *сюрьективдүү* деп аталат.

Сюрьективдүү чагылтуу үчүн $f: X\overset{sur}{\to} Y$ жазуу кабыл алынган, ал эми окуганда «f Xти Yтин үстүнө чагылтат» деп окулат.

Мисалдар.

1) f:Z→N, f(x)=|x| +1 чагылтуусу сюрьекция болот.

2) бир да $f: \{1,2,\ldots,n\}\to N$ чагылтуусу сюрьекция боло албайт, себеби $\{1,2,\ldots,n\}$ чектүү көптүк, N чексиз көптүк.

3) $f: Z\to Q$, $f(x)=x+7$ чагылтуусу сюрьекция болбойт.

Def. Эгерде $f: X\to Y$ чагылтуусу бир эле учурда иньективдүү жана сюрьективдүү болсо, анда ал биективдүү чагылтуу деп аталат.

Биективдүү чагылтуу үчүн $f: X \overset{bi}{\to} Y$ жазуу кабыл алынган. Аныктоо боюнча: $f: X \overset{bi}{\to} Y \overset{def}{\Leftrightarrow} f: X \overset{in}{\to} Y \wedge f: X \overset{sur}{\to} Y$.

Биективдүү чагылтууну башкача кылып «өз ара бир маанилүү чагылтуу (тиешелештик)» деп да атаса болот.

Мисалдар. 1) $f: R\to R$, $f(x)=x^3$ чагылтуусу биекция болот.

2) $f: R\to R$, $f(x)=x^{2n}$ чагылтуусу биекция болбойт, $n\in N$.

3) $f:[0,1] \to [a,b]$, $f(x)=a+(b-a)x$ чагылтуусу биекция болот.

Жогоруда биз «бир өзгөрүлмөлүү» чагылтууга аныктоо бердик, ошол сыяктуу көп (эки, уч, ж.б.) өзгөрүлмөлүү чагылтууларга аныктоо берүүгө болот.

Def. A_1, A_2,… ,A_n көптүктөрүндө аныкталган n өзгөрүлмөлүү чагылтуу деп, ар кандай $f: A_1\times A_2\times\ldots\times A_n\to B$ чагылтуусун айтабыз. $f: A_1\times A_2\times\ldots\times A_n\to B$ чагылтуусунун $<a_1,a_2,\ldots,a_n>$ кортежи кезиндеги мааниси $f(<a_1,a_2,\ldots,a_n>)=f(a_1,a_2,\ldots,a_n)$ болуп белгиленет, жана ал $a_1,a_2,\ldots,a_n$ элементтеринин f элеси деп аталат. Эгерде бул жерде n=1 болуп калса, анда биз жогоруда каралган бир өзгөрүлмөлүү $f: A_1\to B$ чагылтуусуна ээ болобуз.

Текшерүүчү суроолор

1) Чагылтуу деген эмне?

2) Функциялык катыш деген эмне?

3) Чагылтуу менен функциялык катыштын кандай айрымасы бар?

4) Чагылтуунун кандай түрлөрү бар?

5) Иньекция менен сюрьекциянын кандай айрымасы бар?

Өз алдынча иштөө үчүн көнүгүүлөр

Төмөнкү катыштардын кайсылары чагылтуу боло алат? Чагылтуунун түрүн аныктагыла. (1-9)

1) $\varphi = \{(x,y) \in R \times R \mid y = x^2\}$;

2) $\varphi = \{(x,y) \in [0,\infty) \times [0,\infty) \mid y = x^2\}$;

3) $\varphi = \{(x,y) \in [0,1] \times [0,1] \mid y = x^2\}$;

4) $\varphi = \{(x,y) \in [0,\infty) \times (-\infty,+\infty) \mid x = y^2\}$;

5) $\varphi = \{(x,y) \in [-1,1] \times [-1,0] \mid x^2 + y^2 = 1\}$;

6) $\varphi = \{(x,y) \in [-1,0] \times [-1,1] \mid x^2 + y^2 = 1\}$;

7) $\varphi = \{(x,y) \in [-1,0] \times [-1,0] \mid x^2 + y^2 = 1\}$;

8) $\varphi = \{(x,y) \in N \times N \mid x - y = 3\}$;

9) $\varphi = \{(x,y) \in N \times N \mid \ |x - y| = 3\}$.

Эгер $f : X \overset{bi}{\rightarrow} Y,\ \ g : Y \overset{bi}{\rightarrow} Z$ болсо, анда

1) $g \circ f : X \overset{bi}{\rightarrow} Z$

2) $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$ экендигин далилдегиле.

III. МАТЕМАТИКАЛЫК ЛОГИКАНЫН НЕГИЗДЕРИ

§3.1. Айтуу түшүнүгү

«Айтуу» - бул математикалык логиканын алгачкы түшүнүктөрүнүн бири .

Def. Айтуу деп логикада чын же жалган деп бир маанилүү түрдө мүнөздөөгө мүмкүн боло турган жай сүйлөм аталат.

Айтуу же чын болот, же жалган болот, бирок бир дагы айтуу бир эле учурда чын да, жалган да боло албайт.

Мисалдар. 1) Бишкек шаары Кыргызстандын борбору;

2) Ак жол сага абитуриент!

3) Саат канча болду?

4) «3>5»;

5) «5x+1=0».

Бул сүйлөмдөрдүн 1) чын айтуу, 4) жалган айтуу болот; 2), 3), 5) айтуу болбойт.

Айтуунун мүнөздөмөсү боюнча аныктоолор, суроолуу жана илептүү сүйлөмдөр айтуу боло алышпайт. Логикада бизди айтуулардын мазмуну кызыктырбастан, алардын кабыл алган «чын» же «жалган» деген маанилери гана кызыктырат. Айтуулар латын алфавитинин кичине тамгалары менен белгиленет. Ал эми «чын» же «жалган» деген маанилер кыскача «1» жана «0» деп белгиленет.

Математикалык логика элементардык айтуулардан логикалык амалдарды колдонуудан алынган ар кандай жаңы айтуулардын арасындагы байланыштарды изилдей турган илим болуп саналат.

§3.2. Айтуулардын үстүнөн аткарылуучу амалдар

Математикалык логиканын формулалары элементардык айтууларга чектүү (бирок каалагандай чоң) сандады логикалык амалдарды колдонуудан алынат. Бул формулалардын чындык маанилери ага кирүүчү элементардык айтуулардын маанилери боюнча толук бойдон аныкталат жана бул көз карандылык чындык таблицасынан ачык түрдө көрүнөт.

Мейли x жана y каалаган эки айтуу болсун.

1) x айтуусунун *тануусу* деп x чын болгондо жалган деген маанини, ал эми x жалган болгондо чын маанисин кабыл ала турган экинчи бир айтууну айтабыз. x айтуусунун тануусу $\bar{x}$ болуп белгиленет жана «x эмес» деп окулат. Тануунун чындык таблицасы төмөнкүчө болот:

x	0	1
$\bar{x}$	1	0

$\bar{x}$ тануусу кээде $\rceil x$ деп да белгиленет.

Тануу бир орундуу (унардык) амал. Кийинки логикалык амалдарыбыз эки орундуу (бинардык) амал болуп эсептелет.

2) x жана y айтууларынын *коньюнкциясы* деп, ушул айтуулардын ар бири чын бологондо, жана ушул учурда гана, чын боло турган үчүнчү бир айтууну айтабыз. x жана y айтууларынын коньюнкциясы $x \wedge y$ деп белгиленет жана «x жана y» деп окулат. Коньюнкциянын чындык таблицасы төмөндөгүдөй болот:

x	1	1	0	0
y	1	0	1	0
$x\wedge y$	1	0	0	0

$x\wedge y$ коньюнкциясы кээде $x\&y$ деп да белгиленет.

3) x жана y айтууларынын *дизьюнкциясы* деп ушул айтуулардын жок дегенде бири чын болгондо, жана ушул учурда гана, чын боло турган үчүнчү бир айтууну айтабыз. x жана y айтуулардын дизьюнкциясы $x\vee y$ болуп белгиленет жана «x же y» деп окулат. Аныктоо боюнча $x\vee y$ дизьюнкциясы x, y тер экөө тең жалган болгондо, жана ушул учурда гана жалган болот.

Дизьюнкциянын чындык таблицасы төмөнкүчө болот:

x	1	1	0	0
y	1	0	1	0
$x\vee y$	1	1	1	0

4) x жана y айтууларынын *импликациясы* деп x - чын, y – жалган болгон учурда, жана ушул учурда гана, жалган боло турган үчүнчү бир айтууну айтабыз. x жана y айтууларынын импликациясы $x\to y$ деп белгиленет.

Импликациянын чындык таблицасы төмөнкүчө болот:

x	1	1	0	0
y	1	0	1	0
$x\to y$	1	0	1	1

5) x жана y айтууларынын *эквиваленциясы* деп, экөө тең бир эле учурда чын же бир эле учурда жалган болгон учурда, жана ушул

учурда гана, чын боло турган үчүнчү бир айтууну айтабыз. x жана y айтууларынын эквиваленциясы $x\leftrightarrow y$ деп белгиленет. Эквиваленциянын чындык таблицасы төмөндөгүдөй болот:

x	1	1	0	0
y	1	0	1	0
$x\leftrightarrow y$	1	0	0	1

6) x жана y айтууларынын экөө тең бир эле учурда чын болгон учурда, жана ушул учурда гана, жалган боло турган үчүнчү бир айтуу *Шеффердин штрихи* деп аталат жана $x|y$ деп белгиленет. $x|y$ – «x айтуусу y айтуусу менен биргелешпеген» деп окулат.

Шеффердин штрихинин чындык таблицасы төмөндөгүдөй болот:

x	1	1	0	0
y	1	0	1	0
$x\vert y$	0	1	1	1

7) x жана y айтууларынын экөө тең бир эле учурда жалган болгон учурда, жана ушул учурда гана, чын боло турган үчүнчү бир айтуу *Лукасевичтин штрихи* деп аталат жана $x\downarrow y$ деп белгиленет. $x\downarrow y$ – «x да эмес, y да эмес» деп окулат.

Лукасевичтин штрихинин чындык таблицасы төмөндөгүдөй болот:

x	1	1	0	0
y	1	0	1	0
$x\downarrow y$	0	0	0	1

Айтуулар логикасынын формулалары табиятты ар түрдүү болгон үч обьектиден: айтуулардан, логикалык амалдардан жана кош кашаалардан түзүлөт. Формулалар индуктивдүү түрдө төмөндөгүдөй аныкталат:

1) элементардык формулалар (айтуулар) айтуулар логикасынын формулалары деп эсептелет;
2) Эгерде A жана B лар формула болушса, анда $\bar{A}$, $A \wedge B$, $A \vee B$, $A \to B$, $A \leftrightarrow B$ жазууларынын ар бири формула деп эсептелет;
3) 1), 2) пунктарда көрсөтүлгөн жол жана ушундай жол менен гана алынган туюнтмалар айтуулар логикасынын формулалары деп эсептелет. Мында каралып жаткан туюнтманын бир маанилүүлүгү ( ) кашаанын жардамы менен камсыз кылынат жана ал кашааалар минималдуу түрдө пайдаланылат.

Айтуулар логикасынын формулалары: тавтология, теңдеш жалган, аралаш маанилүү болуп үч бөлүккө бөлүнөт.

Def. Эгерде формула өзү кармап турган өзгөрүлмөлөрдөн көз карандысыз түрдө эле чын деген мааниге ээ болсо, анда ал логиканын *закону* же *тавтология* деп аталат.

Def. Эгерде формула өзү кармап турган өзгөрүлмөлөрдөн көз карандысыз түрдө эле жалган деген мааниге ээ болсо, анда ал *теңдеш жалган* формула деп аталат.

Def. Эгерде формула өзү кармап турган өзгөрүлмөлөрдүн кээ бир маанилеринде чын, ал эми башка маанилеринде жалган деген мааниге ээ болсо, анда ал *аралаш маанилүү* формула деп аталат.

Текшерүүчү суроолор

1) Математикалык логика илиминин предмети эмне?
2) Айтуу деген эмне?
3) Айтуулардын формуласы деген эмне?

4) Айтуулардын үстүнөн кандай амалдарды жүргүзсө болот?

5) Формуланын кандай түрлөрү бар?

6) Элементардык формула деген эмне?

Өз алдынча иштөө үчүн көнүгүүлөр.

1) Төмөнкү сүйлөмдөр айтуу болобу, эгер айтуу болсо чынбы же жалганбы?

а) Ош шаары Казахстандын борбору.

б) Бишкек шаары Кыргызстандын борбору.

в) Эч бир адамдын салмагы 1000кг болбойт.

г) Бүгүн канчанчы күн?

д) $2>5$

е) $\forall x,y\in\Re: x+y=y+x$

ж) $x^2-5x+6=0$

з) x^2-5x+6.

и) Бул сүйлөм жалганбы?

2) Айтуу боло турган (болбой турган) сүйлөмдөргө мисал келтиргиле.

3) Төмөнкү айтуулардын чын же жалган экендигин аныктагыла.

а) $2\in\{x\,|\,2x^3-3x^2+1=0,\ x\in R\}$;

б) $-3\in\{x\,|\,\dfrac{x^3-1}{x^2+2}<-2,\ x\in R\}$;

в) $3\in\{\dfrac{2n+1}{3n-2}, n\in N\}$;

г) $\{1\}\in N$;

д) $\varnothing\in\varnothing$;

е) $\{\varnothing\}\subset\{\varnothing,\{\varnothing\}\}$.

4) Төмөнкү импликациялардын кайсылары чын:

а) эгер 2*2=4 болсо, анда 2<3;

б) эгер 2*2=4 болсо, анда 2>3;

в) эгер 2*2=5 болсо, анда 2<3;

г) эгер 2*2=5 болсо, анда 2>3?

5) мейли x, y, z,v айтуулары тиешелүү түрдө «7 – жөнөкөй сан», «7 – курама сан», «8 – жөнөкөй сан», «8 - курама сан» болсун:

а) $x \wedge z$, $x \wedge v$, $y \wedge z$, $y \wedge v$ сүйлөмдөрүнүн кайсылары чын, кайсылары жалган;

б) $x \vee z$, $x \vee v$, $y \vee z$, $y \vee v$ сүйлөмдөрүнүн кайсылары чын, кайсылары жалган;

в) $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \bar{v}$ сүйлөмдөрүнүн кайсылары чын, кайсылары жалган?

6) Төмөнкү барабардыктар орун ала турган x, y тердин логикалык маанилерин тапкыла:

а) $(1 \to x) \to y = 0$; б) $x \vee y = \bar{x}$.

7) эгер $x \to y$ импликациясы чын, $x \leftrightarrow y$ эквиваленциясы жалган болсо, анда $y \to x$ импликациясы жалган болобу же чын болобу?

8) мейли x=0, y=1, z=1 болсун. Төмөнкү татаал айтуулардын логикалык маанилерин аныктагыла:

а) $x \wedge (y \wedge z)$; б) $(x \wedge y) \wedge y$; в) $x \to (y \to z)$;

г) $x \wedge y \to z$; д) $(x \wedge y) \leftrightarrow (z \vee \bar{y})$; е) $((x \vee y) \wedge z) \leftrightarrow ((x \wedge z) \vee (y \wedge z))$;

9) Төмөнкү формулалар үчүн чындык таблицасын түзгүлө:

а) $\bar{a} \vee \bar{b}$; б) $(x \vee y) \to (x \wedge \bar{y} \vee \bar{x} \to \bar{y})$; в) $(x \wedge y) \vee z$;

г) $x \wedge \bar{y} \to (y \vee \bar{x} \to \bar{z})$; д) $(x \to \bar{y}) \to (\overline{x \vee y} \wedge \bar{z})$; е) $(\bar{x} \vee y) \wedge (y \to (u \to x))$;

10) Эгерде A формуласы n элементардык айтуулардан түзүлгөн болсо, анда бул формуланын чындык таблицасы канча жолчодон турат?

11. Формуланын түрүн аныктагыла:

11.1. $\neg(\neg(X \vee У) \Rightarrow \neg(X \wedge У))$.

11.2. $(X \Rightarrow У) \Rightarrow (\neg У \Rightarrow \neg X)$.

11.3. $\neg(X \Rightarrow (У \Rightarrow X) \wedge Z$.

11.4. $\neg X \Rightarrow (X \Rightarrow Y) \vee Z$.

11.5. $((X \wedge Y) \Leftrightarrow Y) \Leftrightarrow (Z \Rightarrow Y)$.

11.6. $((X \Rightarrow Y) \wedge (Y \Rightarrow Z)) \Rightarrow (X \Rightarrow Y)$.

11.7. $\neg(X \Rightarrow Z) \Rightarrow ((Y \Rightarrow Z) \Rightarrow (X \vee Y \Rightarrow Z))$.

11.8. $(X \Rightarrow Y) \Rightarrow ((X \vee Z) \Rightarrow (Y \vee Z))$.

11.9. $(X \Rightarrow (Y \Rightarrow Z)) \Rightarrow ((X \Rightarrow Y) \Rightarrow (X \Rightarrow Z))$.

11.10. $\neg(X \Rightarrow Y) \Rightarrow ((X \wedge Z) \Rightarrow (Y \wedge Z))$.

11.11. $(X \wedge Y) \Rightarrow Z \Leftrightarrow X \Rightarrow (Y \Rightarrow Z)$.

11.12. $(X \wedge Y) \Rightarrow Z \Leftrightarrow (X \wedge \neg Z) \Rightarrow \neg Y$.

11.13. $\neg(X \Rightarrow Y) \Leftrightarrow X \wedge \neg Y$.

11.14. $(X \Rightarrow Y) \wedge \neg Y \Rightarrow \neg X$.

11.15. $(X \Rightarrow Y) \Rightarrow (X \wedge Z \Rightarrow Y \wedge Z)$.

11.16. $(X \Rightarrow Y) \wedge (Z \Rightarrow T) \Rightarrow (X \wedge Z \Rightarrow Y \wedge T)$.

11.17. $(X \Rightarrow Y) \wedge (Z \Rightarrow T) \Rightarrow (X \vee Z \Rightarrow Y \vee T)$.

11.18. $\neg(X \Leftrightarrow Y) \Leftrightarrow (\neg(X \Rightarrow Y) \vee \neg(Y \Rightarrow X))$.

11.19. $(X \wedge Y) \Rightarrow (Z \wedge \neg Z \Rightarrow X \vee Z)$.

11.20. $(X \Leftrightarrow Y) \Leftrightarrow (X \Rightarrow Y) \wedge (Y \Rightarrow X)$.

11.21. $(X \Rightarrow Y) \wedge (Z \Rightarrow X) \vee Y \wedge \neg Z$.

11.22. $\neg(\neg X \Leftrightarrow Z) \wedge Y) \vee (X \vee Z) \Leftrightarrow Z$.

11.23. $X \Leftrightarrow Z \Rightarrow Y \vee \neg X \wedge \neg Z$.

11.24. $Y \Rightarrow \neg Y \vee X \wedge Z \Leftrightarrow \neg X$.

11.25. $X \wedge Z \vee Y \wedge X \Leftrightarrow Y \Rightarrow \neg X$.

§3.3. Предикат түшүнүгү

Математикалык ой жүгүртүүлөөрдү окуп үйрөнүүдө айтуулар алгебрасы жетишсиз болот. Ошондуктан айтууларды толук бойдон изилдей ала турган логикалык системаны түзүү зарылдыгы келип чыгат. Андай система болуп предикаттар логикасы эсептелет. Предикаттар логикасы айтуулар алгебрасын толук бойдон өз ичине камтып турат жана анын изилдөө обьектиси болуп өзгөрүлмөлөрү бар сүйлөмдөр эсептелинет. Мындай сүйлөмдөр өзгөрүлмөлөрдүн кабыл алууга мүмкүн болгон ар бир маанисинде чын же жалган деген маанилерди кабыл алышат.

Мисалдар. 1) «$x^2+1=0$» сүйлөмү (x – комплекстик сан);

2) «$tg(x)ctg(x)=1$» сүйлөмү ($x\in\mathfrak{R}$);

3) «z – x жана у сандарынын жалпы бөлүүчүсү» сүйлөмү ($x,y,z\in Z$);

4) «x – экилик эсептөө системасынын цифрасы» сүйлөмү ($x\in N$);

5) «3>6» сүйлөмү.

Def. Эгерде өзгөрүлмөлөрү бар сүйлөм өзгөрүлмөлөрүнүн кабыл алууга мүмкүн болгон бардык маанилеринде чын же жалган деген маанилерге ээ болсо, анда ал *предикат* деп аталат.

Предикаттар өзгөрүлмөлөрүнүн санына жараша нөл орундуу (айтуу), бир орундуу, эки орундуу, үч орундуу ж.б. болуп бөлүнүшөт. Жогорудагы 5) – мисал нөл орундуу, анткени ал айтуу болот; 1), 2),4) – мисалдар эки орундуу, анткени аларда бирден гана өзгөрүлмө бар жана ага көрсөтүлгөн аймактарда конкреттүү маанилерди берип айтууларга ээ болобуз; 3) - мисал үч орундуу предикат. Эгерде 1), 2), 3), 4) мисалдардагы сүйлөмдөрдү тиешелүү түрдө $p(x)$, $q(x)$, $f(x,y,z)$, $s(x)$ деп белгилесек, анда $p(1)\equiv 0$, $p(-i)\equiv 1$; каалаган чыныгы x тер үчүн $q(x)\equiv 1$; $f(4,8,2)\equiv 1$, $f(3,11,4)\equiv 0$; $s(0)\equiv 1$, $s(2)\equiv 0$, $s(1)\equiv 1$ болору ачык көрүнүп турат.

Мындан ары $x,y,\ldots,z$ өзгөрүлмөлөрү бар предикаттарды $p(x,y,\ldots,z)$, $q(x,y,\ldots,z)$, ж.б. деп белгилейбиз.

Def. $p(x,y,\ldots,z)$ предикаты чын маанисин кабыл ала турган бардык $<x,y,\ldots,z>$ маанилеринин жыйындысы ушул предикаттын чындык аймагы деп аталат.

Жогорудагы 1) мисалда $p(x)$ предикаттын чындык аймагы болуп $\{\pm i\}$болот; 2) мисалда $q(x)$ предикаттын чындык аймагы болуп чыныгы сандардын көптүгү болот; 3) мисалда $f(x,y,z)$ предикаттын чындык аймагы $<az,bz,z>$, $z\neq 0$, көрүнүшүндөгү үчтүктөр болот; 4) мисалда $s(x)$ предикаттын чындык аймагы $\{0,1\}$болот.

Предикаттын чындык аймагы каралып жаткан маселеден аныкталат, көпчүлүк учурда ал салыштырмалуу түшүнүк болуп эсептелет.

Мисал. 1) мисалдагы $p(x)$ предикатын чыныгы сандар үчүн аныкталган десек, анда анын чындык аймагы курук (бош) көптүк болот.

Def. Эгерде $p(x,y,\ldots,z)$ предикаты өзгөрүлмөлөрүнүн мүмкүн болгон бардык маанилеринде чын деген маанини кабыл алса, анда ал теңдеш чын предикат деп аталат.

Ар кандай предикат анын аныктоо жана чындык аймактарын берүү менен бир маанилүү түрдө аныкталат.

Предикаттардын үстүнөн да айтуулардын үстүнөн жүргүзүлгөн логикалык амалдарды жүргүзүү мүмкүн.

Текшерүүчү суроолор

1) Предикат деген эмне?
2) Айтуу менен предикаттын кандай айрымасы бар?
3) Чындык аймак деген эмне?
4) Качан предикат теңдеш чын деп аталат?
5) Предикаттардын үстүнөн кандай амалдарды жүргүзсө болот?

Өз алдынча иштөө үчүн көнүгүүлөр.

1) Төмөнкү предикаттардын чындык аймактарын тапкыла:

а) $p(x) \equiv$ «$x^2 \leq 257 \wedge x^2-16x-17=0$», $x \in Z$;

б) $p(x) \equiv$ «$x^2 \leq 26 \wedge x<0$», $x \in \Re$;

в) $p(x) \equiv$ «x – толук квадрат $\rightarrow x^2 \leq x$», $x \in Z$;

г) $p(x,y) \equiv$ «$x^2 \leq 626 \leftrightarrow |y| > 10$», $x,y \in Z$;

2) Төмөнкү предикаттар кандай x жана y тер үчүн теңдеш чын болот:

а) $p(x,y) \equiv$ «$2xy \leq x^2+y^2$»; б) $p(x,y) \equiv$ «$2\sqrt{xy} \leq x+y$»;

в) $p(x,y) \equiv$ «$|x| \leq x$»; г) $p(x,y) \equiv$ «$x \leq |x|$»

3) Бүтүн сандар көптүгүндө аныкталган жана төмөнкү касиеттерге ээ болгон p(x), q(x) предикаттарын түзгүлө:

а) p(x), q(x) теңдеш чын эмес, бирок $p(x) \vee q(x)$ теңдеш чын;

б) p(x), q(x) тер аткарылуучу, бирок $p(x) \wedge q(x)$ теңдеш жалган;

4) Төмөнкү предикаттардын кайсылары теңдеш чын предикат болот:

а) $x^2+y^2\geq 0$; б) $x^2+y^2>0$; в) $\sin^2x+\cos^2x=1$;

г) $(x+1)^2>x-1$; д) $x^2+1\geq(x+1)^2$; е) $\mathrm{ch}^2x-\mathrm{sh}^2x=1$;

$(\mathrm{ch}x=(e^x+e^{-x})/2, \mathrm{sh}x=(e^x-e^{-x})/2)$

5) Мейли p(x): «x – жуп сан», q(x): «x – 3кө эселүү»предикатары натуралдык сандардын көптүгүндө берилген болсун. Төмөнкү предикаттардын чындык аймактарын тапкыла:

а) $p(x)\vee q(x)$; б) $p(x)\wedge q(x)$; в) $\bar{p}(x)$; г) $p(x)\to q(x)$.

6) p(x): «$x^2-9=0$» жана q(x): «$5x+7<32$» предикаттары берилген. Эгерде алардын аныкталуу аймагы: а) R; б) N болсо, анда чындык аймактарын тапкыла.

IV. Бульдун алгебрасы жана функциялары.

§4.1. Негизги түшүнүктөр жана аныктоолор

Жогоруда көптүктөр теориясын жана алардын алгебрасын карадык. Көптүктөрдүн үстүнөн кошуу (бириктирүү) жана көбөйтүү (кесилиш) амалдары дайыма аткарылат. Көптүктөрдүн алгебрасынан айрымаланган дагы бир алгебраны, тактап айтканда Бульдун алгебрасы менен таанышып чыгабыз.

Def. Элементтеринин үстүндө:

1) бир орундуу: $\forall x$ үчүн $\exists\ \bar{x}$ – амалы аткарылган;
2) эки орундуу: $\forall x,y$ үчүн $(x\vee y)$ – кошуу жана $\forall x,y$ үчүн $(x\wedge y)$ – көбөйтүү амалдары аткарылган;
3) 0 жана 1 деген элементтерине ээ болгон;
4) аткарылуучу амалдар төмөнкү 13 касиетке ээ болгондой, кандайдыр бир В көптүгү *Бульдун алгебрасы* деп аталат:

1^0. $\forall x : \overline{\overline{x}} = x$;

2^0. $\forall x,y : x\wedge y = y\wedge x$;

3^0. $\forall x, y, z : (x\wedge y)\wedge z = x\wedge(y\wedge z)$;

4^0. $\forall x,y : x\vee y = y\vee x$;

5^0. $\forall x, y, z : (x\vee y)\vee z = x\vee(y\vee z)$;

6^0. $\forall x, y, z : x\wedge(y\vee z) = (x\wedge y)\vee(x\wedge z)$;

7^0. $\forall x, y, z : x\vee(y\wedge z) = (x\vee y)\wedge(x\vee z)$;

8^0. $\forall x, y$: $\overline{x\vee y} = \bar{x}\wedge\bar{y}$;

9^0. $\forall x, y$: $\overline{x\wedge y} = \bar{x}\vee\bar{y}$;

10^0. $\forall x$: $x\vee x = x$;

11^0. $\forall x : x\wedge x = x$;

12^0. $\exists\ 1$; $\forall x$: $1\wedge x = x$;

13^0. $\exists\ 0$; $\forall x$: $0\vee x = x$.

Мындагы 1^0, 7^0, 8^0, 9^0, 10^0, жана 11^0 – касиеттер сандуу алгебрада аткарылбайт. Бульдун алгебрасындагы 0 жана 1 элементтери өзүнчө бир касиеттерге ээ болгон өзгөчө элементтер болушат. Булдун алгебрасынын 13 касиети эреже катарында кабыл алынып, алардын негизинде калган касиеттери, эрежелери келтирилип чыгарылат.

Мисал. B={0,1}. Бул көптүктө кошуу ($\vee$) жана көбөйтүү ($\wedge$) амалдарын төмөнкү таблица боюнча жүргүзөбүз:

x	1	1	0	0
y	1	0	1	0
$x\vee y$	1	1	1	0
$x\wedge y$	1	0	0	0

Бир орундуу ($\bar{\ }$) сызыкча амалын $\overline{0}=1$, $\overline{1}=0$ деп түшүнөбүз.
Анда B={0,1} Бульдун алгебрасынын 13 касиети аткарылат.

1^0. $\overline{\overline{0}}=\overline{1}=0$; $\overline{\overline{1}}=\overline{0}=1$;

2^0. $0\wedge 1=0=1\wedge 0$;

3^0. $(0\wedge 1)\wedge 0=0=0\wedge(1\wedge 0)$; $(0\wedge 1)\wedge 1=0=0\wedge(1\wedge 1)$;

4^0. $1\vee 0=1=0\vee 1$;

5^0. $(1\vee 0)\vee 0=1=1\vee(0\vee 0)$; $(1\vee 0)\vee 1=1=1\vee(0\vee 1)$;

6^0. $0\wedge(1\vee 0)=0=(0\wedge 1)\vee(0\wedge 0)$; $0\wedge(1\vee 1)=0=(0\wedge 1)\vee(0\wedge 1)$;

7^0. $1\vee(1\wedge 0)=1=(1\vee 1)\wedge(1\vee 0)$; $1\vee(0\wedge 0)=1=(1\vee 0)\wedge(1\vee 0)$;

8^0. $\overline{0\vee 1}=\overline{1}=0=\overline{0}\wedge\overline{1}$; 9^0. $\overline{0\wedge 1}=\overline{0}=1=\overline{0}\vee\overline{1}$;

10^0. $1\vee 1=1$; $0\vee 0=0$; 11^0. $1\wedge 1=1$; $0\wedge 0=0$;

12^0. $\exists\, 1$; $1\wedge 0=0$; $1\wedge 1=1$; 13^0. $\exists\, 0$; $1\vee 0=0$; $0\vee 0=0$.

Жогорудагы үч амал аткарылган B={0,1}көптүгү Бульдун алгебрасы болот.

Демек, айтууларга эквиваленттүү болгон көптүктөрдүн классы Бульдун алгебрасы болот.

Def. $f:E_2^n \to E_2$ функциялары Бульдун алгебрасынын функциялары же Бульдун функциялары деп аталат, мында $E_2=\{0,1\}$, $E_2^n=\left\{\underbrace{\{0,1\},\{0,1\},...,\{0,1\}}_{n}\right\}$.

Эгерде $f:E_2 \to E_2$ болсо, анда Бульдун функциясы бир өзгөрүлмөлү, ал эми $f:E_2^n \to E_2$ болсо, анда Бульдун функциясы n өзгөрүлмөлү деп аталат. n өзгөрүлмөлүү Бульдун функциясын чындык таблица аркылуу жазууга болот, мисалы бир өзгөрүлмөлүү Бульдун функциясы үчүн:

x	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$	$f_4(x)$
0	0	0	1	1
1	0	1	0	1

Мындан бир өзгөрүлмөлү Бульдун функцияларынын саны 4 экендиги келип чыгат; эми эки өзгөрүлмөлүү булдун функциясы үчүн чындык таблицаны түзөбүз:

X	y	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$	$f_4(x)$	$f_5(x)$	$f_6(x)$	$f_7(x)$	$f_8(x)$	$f_9(x)$	$f_{10}(x)$	$f_{11}(x)$	$f_{12}(x)$	$f_{13}(x)$	$f_{14}(x)$	$f_{15}(x)$	$f_{16}(x)$
0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	0	1	0	1	0	1	0
0	1	0	0	0	1	1	0	1	1	0	1	0	1	1	0	0	1
1	0	0	0	1	1	1	0	0	1	0	1	1	0	0	1	1	0
1	1	0	1	1	1	1	0	0	0	1	0	0	1	1	0	1	0

Бул жерде эми жолчолордун саны 4, функциялардын саны 16 экендиги келип чыгат.

Демек, эгерде Бульдун функциясында өзгөрүлмөлөрдүн саны n болсо, анда чындык таблицада жолчолордун саны 2^n болот, ал эми булдун функцияларынын саны 2^{2^n} ге барабар болот экен.

Эгерде

$$f(a_1,\dots,a_{i-1},0,a_{i+1},\dots,a_n)\neq f(a_1,\dots,a_{i-1},1,a_{i+1},\dots,a_n),$$

барабарсыздыгы аткарыла тургандай $a_1,\dots,a_{i-1},a_{i+1},\dots,a_n$ маанилердин тобу табылса (жашаса), анда f Бульдун функциясы x_i өзгөрүлмөсүнөн маанилүү көз каранды болот. Мындай учурда x_i өзгөрүлмө маанилүү өзгөрүлмө, тескери учурда маанилүү эмес же жалган деп аталат.

Мисалы. Бир өзгөрүлмөлүү $f_1(x)$, $f_4(x)$ функцияларында x маанилүү эмес өзгөрүлмө; эки өзгөрүлмөлүү $f_1(x,y)$, $f_5(x,y)$ функцияларда x,y тер маанилүү эмес өзгөрүлмөлөр;

Def. Эгерде f_1, f_2 ден маанилүү эмес өзгөрүлмөлөрүн чыгарып салуудан (же кошуп алуудан) келип чыкса, анда f_1, f_2 Бульдун функциялары барабар деп аталат.

Def. f функциясынын экилениши деп, $f^*(x_1,\dots,x_n)=\overline{f(\bar{x}_1,\dots,\bar{x}_n)}$ барабардыгы менен аныкталган $f^*(x_1,\dots,x_n)$ функциясын айтабыз.

Мисалы:

F	0	1	$x\wedge y$	$x\vee y$
F^*	1	0	$x\vee y$	$x\wedge y$

V. КОМБИНАТОРИКАНЫН НЕГИЗГИ ЭЛЕМЕНТТЕРИ

§5.1. Комбинаторикалык маселелер. Комбинаториканын негизги принциптери

Комбинаторика – дискреттик көптүктүн элементтерин берилген эрежелер боюнча тандоо жана жайгаштыруу менен байланышкан маселелердин чыгарылыштарын окуп үйрөнүүчү дискреттик математиканын бир бөлүгү.

Кандайдыр бир мааниде бири-биринен айрымаланышкан камтылуучу көптүктөрдүн санын аныктоо маселеси комбинаториканын классикалык маселелери болуп саналат.

«Комбинаторика» термини «Combinatio» деген латын сөзүнөн келип чыгат. Кыргызча - «бириктирүү» деген маанини берет. Кандайдыр бир предметтерден түзүлгөн группа комбинация деп аталат. Комбинацияны түзгөн предметтерди элементтер деп атайбыз.

A_i $(i=1,2,\ldots,n)$ элементтери чектүү көптүктүн элементтери болсун. Көптүктүн бардык элементтерин номерлөөгө болот, б.а. анын ар бир элементине $1,2,\ldots,n$ сандарын тиешелүү коюуга болот. Анын жыйынтыгында кандайдыр бир $a_1, a_2,\ldots, a_n$ түрүндө жазылган удаалаштыкты алабыз.

Мындай номерленген көптүктү иреттелген деп айтабыз.

Комбинаториканын маселелерин чыгарууда колдонулуучу негизги эрежелерге токтололу:

1) **Кошуунун эрежеси** (логикалык кошуу принциби). Эгерде көптүктүн A_1 элементи n_1 жол менен тандалып алынса, A_2 элементи n_1 жолдон айрымаланган n_2 жол менен тандалып

алынса, ж.б.у.с. A_k элементи (k-1) жолдорунан айрымаланган n_k жол менен тандалып алынса, анда элементтердин бирөөсүн тандап алуу $n_1+n_2+\ldots+n_k$ жол менен тандалып алынат.

1-мисал. Ящикте 100 деталь бар. Алардын ичинен элүүсү 1-сорттогу, отузу 2-сорттогу, жыйырмасы 3-сорттогу деталдар. Ящиктен 1- же 2- сорттогу бир деталды алып чыгуунун канча жолу бар?

Чыгаруу. 1-сорттогу деталь 50 жол менен алынышы мүмкүн, 2-сорттогу деталь 30 жол менен алынышы мүмкүн. Анда кошуунун эрежеси боюнча $n_1+n_2=50+30=80$. Демек, 1- же 2-сорттогу бир деталды алып чыгуу үчүн 80 жол бар болот.

2-мисал. Корзинада 7 апельсин , 8 банан жана 12 алма бар. Канча жол менен ал жемиштердин бирөөсүн тандап алууга болот.

Чыгаруу. Ал жемиштердин бирөөсүн тандап алууну 27 (7+8+12=27) ыкма менен иш жүзүнө ашырууга болот.

2) Кобойтуунун эрежеси (логикалык көбөйтүү принциби)

Эгерде көптүктүн $\mathbf{A}_1$ элементи $\mathbf{n}_1$ жол менен тандалып алынса, $\mathbf{A}_1$ элементи тандалып алынгандан кийин, $\mathbf{A}_2$ элементи $\mathbf{n}_2$ жол менен тандалып алынса , ал эми $(\mathbf{A}_1,\mathbf{A}_2)$ түгөйү тандалып алынгандан кийин, $\mathbf{A}_3$ элементи $\mathbf{n}_3$ жол менен тандалып алынса, жана башка ушул сыяктуу $(\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots ,\mathbf{A}_{k-1})$ элементтери тандалып алынгандан кийин, $\mathbf{A}_k$ элементи $\mathbf{n}_k$ жол менен тандалып алынса, анда $\mathbf{A}_1,\mathbf{A}_2,\ldots,\mathbf{A}_k$ элементтеринин бардыгын тандап алуу **$n_1*n_2*\ldots*n_k$** жол менен тандалып алынат.

Мисал. Группада 25 студент бар. Староста, старостанын орун басары жана профоргду шайлоо керек. Аларды шайлоонун канча түрү бар?

Чыгаруу. Көптүк 25 элементтен турат. Старостаны шайлоо үчүн 25 студенттин каалаган бирөөсүн тандап алсак болот. Староста шайлангандан кийин анын орун басарын шайлоо үчүн калган 24 студенттин бирөөсүн тандап алсак болот. Ал экөөсү шайлангандан кийин профоргду калган 23 студенттин бирөөсүн тандап алсак болот. Демек, биздин мисалда **$n_1=25$, $n_2=24$, $n_3=23$,** Анда староста, старостанын орун басары жана профоргду шайлоонун жалпы саны көбөйтүүнүн эрежеси боюнча **$n_1*n_2*n_3=25*24*23=13800$** болот.

Мисал. Канча төрт орундуу сан бар?

Чыгаруу. Төрт орунду санды **abcd** түрүндө жазсак болот. Бул элементтерди **X={ 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}** көптүгүнөн тандап алабыз. **a** элементи үчүн нөлдөн башка каалаган тогуз цифранын бирөөсүн тандап алсак болот. Себеби, 0 цифрасы менен башталган сан - үч орундуу сан болот. Демек, **a** элементин 9 жол менен тандай алабыз, анткени, **X** көптүгү 10 элементтен турат, башкача айтканда **$n_1=9$**. Эми **a** элементи тандалгандан кийин **b** элементи үчүн **X** көптүгүнүн каалаган элементин тандап алсак болот, б.а. **b** элементин 10 жол менен тандап ала алабыз. Ушундай эле **c** жана **d** элементтери да 10 жол менен тандалып алына алышат. Анда көбөйтүүнүн эрежеси боюнча

$n_1 * n_2 * n_3 * n_4 = 9*10*10*10 = 9000$ төрт орундуу сан бар.

Текшерүүчү суроолор

1) Комбинаторика деген эмне?

2) Комбинаториканын классикалык маселеси кандай?

3) Логикалык кошуу принциби кандай айтылат?

4) Логикалык көбөйтүү принциби кандай айтылат?

Өз алдынча иштөө үчүн көнүгүүлөр

1) Тоонун чокусуна 8 жол алып барат.

а) Канча жол менен турист тоого чыгып түшсө болот?

б) Эгер ар түрдүү жол менен чыгып түшсө, анда канча жол менен чыгып түшсө болот?

2) {1,2,3,4,5} цифраларынан канча үч орунду санды түзсө болот?

3) {1,2,3,4,5} цифраларынан, ар бир цифраны бир жолу гана пайдаланып, канча үч орундуу санды түзсө болот?

4) Канча жол менен 7 адамды кассага кезекке тургузса болот?

5) Класста 10 предмет окулат. Дүйшөмбү күнү 6 ар түрдүү сабак болот. Дүйшөмбү күнкү жадыбалды канча түрдүү жол менен түзсө болот?

6) 5ге бөлүнө турган, беш орундуу сандардын саны канча?

7) Үч бурчтуктун бир каптал жагынан **n** чекит, экинчи каптал жагынан **m** чекит алынган. Үч бурчтуктун негизинин ар бир чокусу карама-каршы жактардан алынган чекиттер менен түз сызык аркылуу туташтырылган.

а) үч бурчтуктун ичинде бул түз сызыктардын кесилиш чекиттеринин саны канчоо?

б) Бул түз сызыктар үч бурчтукту канча бөлүккө бөлөт?

8) Эки цифрасы так болгон канча эки орундуу сан бар?

9) Бардык цифралары так болгон канча беш орундуу сан бар?

10) {0, 1, 2, 3, 4, 5} цифраларынын жардамында канча төрт орундуу санды жазса болот? Бул сандардын бардыгынын суммасын тапкыла.

11) {0, 1, 2, 3, 4, 5} цифраларынын жардамында, 3кө бөлүнө турган, канча үч орундуу санды жазса болот?

12) Солдон оңго жана оңдон солго бирдей окула турган канча беш орундуу сан бар(мисал: 67876, 17071, 12321)?

13) Катары менен жайгаштырылган 10 олтургучта 5 бала жана 5 кыз отурат. Канча жол менен балдарды так номерленген олтургучтарга, кыздарды жуп номерленген олтургучтарга отургузса болот?

14) Тамгалардын ордун алмаштыруу менен «математика» сөзүнөн канча сөз түзсө (жасаса) болот?

15) Автомобилдердин номери эки тамга жана төрт цыфрадан түзүлөт. Латын алфавитинин 26 тамгасын пайдаланып, мындай номерлердин санын тапкыла?

16) Айылда 1500 жошоочулар жашайт. Алардын ичинен жок дегенде экөөсү бирдей инициалга ээ экендигин далилдегиле?

17) а) $3^5 \times 5^4$ саны канча ар түрдүү бөлүүчүлөргө ээ?

б) Эгер $p_1,...,p_n$ сандары ар түрдүү жөнөкөй сандар болушса, анда $m = p_1^{\alpha_1} \times ... \times p_n^{\alpha_n}$ саны канча ар түрдүү бөлүүчүлөргө ээ? (мында $\alpha_1,...,\alpha_n$ дер кандайдыр бир натуралдык сандар).

18) 0,999; 1,998; 2,997;…; 999,0 удаалаштыгынын мүчөлөрүнүн 2 цифрасы гана ар түрдүү болгон мүчөлөрүнүн саны канчоо?

19) Кассир сейфдин кодун унутуп калды, бирок ал коддо 23 жана 37 деген сандардын бар экендигин билет. Сейфди ачыш үчүн беш орундуу туура кодду кийриш керек. Сейфди ачыш үчүн канча максималдык сандагы коддорду терүү керек?

20) m жолчо жана n мамычага ээ болгон матрицанын ар бир жолчосуну дагы жана мамычасындагы сандардын көбөйтүндүсү 1 ге барабар. Элементтери 1 жана -1 болгон мындай матрицалардын саны канча?

21) Студент математика боюнча курстук иш жазыш керек. Ага 17 тема алгебрадан, 13 тема геометриядан сунушташты. Курстук иш үчүн бир теманы студент канча жол менен тандай алат?

22) Дипломдук жумуш үчүн матанализ кафедрасында 5 тема, алгебра жана геометрия кафедрасында 6 тема, МОУ кафедрасында 10 тема бар. Дипломдук жумуш үчүн бир теманы матанализ кафедрасынан же алгебра жана геометриядан кафедрасынан канча жол менен тандаса болот?

23) Канча жол менен басмаканада Адыл 12 ар түрдүү китепке кызыл, жашыл жана көк түстөрдө мукаба жасашы мүмкүн?

24) Солдон оңго жана оңдон солго бирдей окулатурган канча жети орундуу сан бар (мисал: 1678761, 2170712, 4123214)?

§5.2. Топтоштуруу

Def. Эгерде n элементтен m ден түзүлгөн комбинация элементтердин курамы менен гана айрымаланса, анда ал *топтоштуруу* деп аталат, жана C_n^m деп белгиленет.

Теорема. Кубаттуулугу n ге барабар болгон A көптүгүнүн кубаттуулугу к га барабар болгон $M_к(A)$ камтылуучу көптүктөрүнүн саны $\frac{n!}{k!(n-k)!}$ га барабар.

Далилдөө. Кубаттуулугу n ге барабар болгон көптүктүн кубаттуулугу к га барабар болгон камтылуучу көптүктөрдүн санын C_n^k менен белгилеп алабыз.

А көптүгүнүн кубаттуулугу к га барабар болгон камтылуучу көптүгүн түзүү үчүн, көптүктүн кубаттуулугу (к-1) ге барабар болгон камтылуучу көптүгүнө, бул камтылуучу көптүккө тиешелүү болбогон n-k+1 элементтердин бирөөсүн бириктирүү (кошуу) керек. Эгерде кубаттуулугу (к-1) болгон камтылуучу көптүктөрдүн санын C_n^{k-1} ге жана алардын ар бирин n-k+1 жол менен кубатуулугун k га айландырса боло тургандыгын эске алсак, анда логикалык көбөйтүүнүн эрежеси боюнча кубаттуулугу k га барабар болгон камтылуучу көптүктөрдүн саны $(n-k+1)C_n^{k-1}$ га барабар болот. Бирок алардын бардыгы ар түрдүү эмес, себеби кубаттуулугу k га барабар болгон камтылуучу көптүк k жол менен түзүүгө болот: ар бирине анын k элементин бириктирүү менен. Ошондуктан биз эсептеген $(n-k+1)C_n^{k-1}$ сан C_n^k дан k эсе көп болот, б.а.

$(n-k+1)C_n^{k-1}=kC_n^k$. Бул жерден

$$C_n^k=\frac{(n-k+1)}{k}C_n^{k-1}=\frac{(n-k+1)}{k}\frac{(n-k+2)}{(k-1)}C_n^{k-2}=...=\frac{(n-k+1)}{k}\frac{(n-k+2)}{(k-1)}...\frac{n-1}{2}C_n^1.$$

А көптүгүндө кубаттуулугу 1 ге барабар болгон камтылуучу көптүктөрдүн саны n ге барабар, C_n^1 дин ордуна n ди коюп $\frac{n!}{k!(n-k)!}$ га ээ болобуз.

Демек, n элементтин k дан топтоштуруулардын саны $C_n^m=\frac{n!}{m!(n-m)!}$ га барабар.

Натыйжа. n элементтен n-m элемент боюнча топтоштуруунун саны n элементтен m элемент боюнча топтоштурууга барабар, б.а. $C_n^m=C_n^{n-m}$.

Мисалдар.

1) Канча жол менен студент 10 китептин ичинен 3 китепти тандаса болот?

Чыгаруу. Изделүүчү тандоолордун саны кубатуулугу 10го барабар болгон көптүктүн кубаттуулугу 3кө барабар болгон камтылуучу көптүктөрүнүү санына барабар болот:

$$C_{10}^3=\frac{10!}{3!7!}=\frac{10*9*8}{6}=120.$$

2) Канча жол менен 10 адамдын ичинен 5 адамдан турган коммиссияны түзсө болот?

Чыгаруу. Коммиссиялардын бардык варианттарын карап чыгуу үчүн, 10 элементтүү көптүктүн 5 элементтүү камтылуучу көптүктөрүн карап чыгуу керек:

$$C_{10}^{5}=\frac{10!}{5!5!}=\frac{10*9*8*7*6}{5*4*3*2}=9*7*4=252.$$

Демек, 10 адамдын ичинен 5 адамдан турган коммиссияны 252 жол менен түзсө болот экен.

3) Шахмат боюнча турнирде n шахматист катышты жана ар бир эки шахматист бир жолудан гана жолугушту. Турнирде канча партия ойнолду?

Чыгаруу. Партиялардын саны n элементтүү көптүктүн 2 элементтүү камтылуучу көптүктөрүнүн санына барабар:

$$C_{n}^{2}=\frac{n!}{2!(n-2)!}=\frac{n(n-1)}{2}.$$

4) Эгерде томпок n-бурчтуктун эч бир үч диагоналы бир чеките кесилишпесе, анда диагоналдардын кесилишкен чекиттеринин санын тапкыла.

Чыгаруу. Ар бир эки диагоналдын кесилишкен чекитине *n*-бурчтуктун 4 чокусу туура келет, жана *n*-бурчтуктун 4 чокусуна 1 кесилишкен чекит туура келет(берилген 4 чокудан түзүлгөн төрт бурчтуктун 2 диагоналынын кесилишкен чекити). Ошондуктан кесилишкен чекиттердин саны *n* элементтүү көптүктөн 4 элементтүү камтылуучу көптүктүн санына барабар болот:

$$C_{n}^{4}=\frac{n!}{4!(n-4)!}.$$

5)Урнада 12 ак, 8 кара шар бар. Арасында 5 кара шар болгондой 11 шарды канча жол менен тандап алууга болот?

Чыгаруу. Тандалып алынган шарлардын 5и кара, 6сы ак. Ак шарларды 6 дан кылып $C_{12}^{6}=\frac{12!}{6!6!}=\frac{12*11*10*9*8*7}{6*5*4*3*2}=924$ жол менен тандап ала алабыз; ал эми кара шарларды 5 тен кылып

$C_8^5 = \frac{8!}{5!3!} = \frac{8*7*6}{3*2} = 56$ жол менен тандап алабыз. Анда көбөйтүүнүн эрежеси боюнча изделген тандап алуулардын саны $C_{12}^6 * C_8^5 = 924 * 56 = 51744$ кө барабар.

Өз алдынча иштөө үчүн мисал-маселелер.

1) 30 студенттин ичинен канча жол менен 3 студенттен турган өкүл тандаса болот?

2) A={1,2,3,4,5} көптүгү берилген. Бул көптүк үч элементтен турган канча ар түрдүү камтылуучу көптүккө ээ.

3) Каалагандай үч чекит бир түз сызыкта жатпай тургандай *n* чекит берилген. Чекиттерди эки-эки ден туташтыруу менен канча түз сызык жүргүзсө болот?

4) Тегиздикте экөөсү параллель болбогон жана үчөөсү бир чекитте кесилишпей турган *n* түз сызык жүргүзүлгөн.

а) Бул түз сызыктардын кесилиш чекиттеринин санын тапкыла.

б) Бул түз сызыктар канча үч бурчтукту түзүшөт?

в) Бул түз сызыктар тегиздикти канча бөлүккө бөлүшөт?

г) Бөлүнгөн тегиздиктердин ичинен канчасы чектелген, канчасы чектелбеген?

5) Ар бир цифрасы мурдагы цифрасынан чоң болгон канча төрт орундуу сан бар?

6) Ар бир цифрасы мурдагы цифрасынан кичине болгон канча төрт орундуу сан бар?

7) p ак жана q кара шарлары берилген.· Канча жол менен бир катарга эки кара шар жанаша турбагандай кылып жайгаштырса болот?

8) Томпок n-бурчтукта бардык диагоналдары жүргүзүлгөн. Эгерде диагоналдардын эч бир үчөөсү бир чекитте кесилишпей тургандыгы белгилүү болсо, анда көп бурчтук канча бөлүккө бөлүнөт?

9) Столдун үстүндө 20 китеп жатат. Алардын 10у алгебра, 4ү геометрия, 6сы информатика. Канча жол менен столдун үстүнөн бир предметке таандык 4 китепти тандаса болот?

10) $C_n^k + C_n^{k-1} = C_{n+1}^k$ теңдештикти далилдегиле. Бул теңдештиктен пайдаланып $C_n^m + C_{n-1}^m + \ldots + C_{n-10}^m = C_{n+1}^{m+1} - C_{n-10}^{m+1}$ орун алышын көрсөткүлө.

11) 20 студенттин ичинен эки кезметчини канча жол менен тандаса болот?

12) Вазада 10 кызыл жана 5 ак жоогазын турат. Канча жол менен вазадан бирдей түсдөгү 5 жоогазынды тандаса болот?

13) 16 команда катышкан чемпионат эки айлампада өткөрүлөт (б.а. ар бир команда ар бири менен эки жолудан жолугушат). Канча жолугушуу өткөрүлө тургандыгын аныктагыла.

14) 30 адам 10 адамдан турган I, II, III группага бөлүнгөн. Ар түрдүү түзүлүшкө ээ болгон группалар канча болушу мүмкүн?

15) Столдун үстүндө 8 китеп бар. Төрт студенттин ар бири экиден 8 китепти алыш керек. Канча жол менен алар китептерди өз ара бөлүштүрсө болот?

16) Турнирде 16 шахматист катышат. Биринчи турдун ар түрдүү жадыбалдардын санын аныктагыла (жадыбал ар түрдүү деп аталат, эгерде катышуучулар бир партия менен болсо да

айрымаланса: фигуранын түсү, досканын номери эске алынбайт).

17) Математика кружогуна 10, информатика куржогуна 15, физика кружогуна 12, кыргыз-тили кружогунда 20 студент катышат. 4 информатик, 3 математик, 5 физик жана 1 кыргыз тилчиден турган бригаданы канча жол менен түзсө болот?

18) Вазада 10 кызыл жана 4 ак жоогазын турат. Канча жол менен вазадан бир кызыл жана 2 ак түсдөгү жоогазынды тандаса болот?

19) Студент үч күндүн ичинде 10 мисалды чыгарып бүтүшү керек. Эгер бир күндө жок дегенде бир мисал чыгарса, анда канча жол менен мисалдарды күнгө бөлүштүрсө болот.

20) Эгер коду бар кулпуда 10 цифра болсо, анда канча үч кнопкалуу комбинация жашайт (үч кнопканын баары бир убакытта басылат)?

21) Кутманда математика боюнча 7, Алтында 9 китеп бар. Алар бири бири менен эки китепти эки китепке канча жол менен алмаштырышы мүмкүн.

22)Канча жол менен 36 картаны 4 оюнчуга тең бөлсө болот?

23) а) $k<(n-1)/2$ болгондо $C_n^{k+1} > C_n^k$, жана $k>(n-1)/2$ болгондо $C_n^{k+1} < C_n^k$ боло тургандыгын далилдегиле.

б) C_n^k, сандарынын ичинен эң чоңун көрсөткүлө ($k=0,1,\ldots,n$).

§5.3. Орундаштыруу жана орун алмаштыруу

Def. Эгерде n элементтен m элемент боюнча түзүлгөн комбинация же элементеринин курамы, же элементтеринин орун алуу ирети боюнча айрымаланышса, анда ал комбинация n элементтен m элемент боюнча *орундаштыруу* деп аталат.

Мисалдар.

1) {a,b,c,d}элементтеринен турган көптүк берилсин. Аларды экиден кылып орундаштыруунун бардык варианттарын жазалы: ab, ac, ad, bc, bd, cd, ba, ca, da, cd, db, dc. Мында элементтердин кайталануусу эсепке алынган жок.

3) Текчеде алгебра боюнча 10 китеп, геометрия боюнча 20 китеп коюлган. Бир илимге тиешелүү болгон эки китепти тандап алуу керек. Китептерди тандап алуунун иретин эске алганда, бир предметке тиешелүү эки китепти канча жол менен тандап алса болот?

Чыгаруу. 1-аракетте алгебрадан китептерди, 2-аракетте геометриядан китептерди тандап алууну шарттапып алалы. Анда көбөйтүүнүн эрежеси боюнча алгебрадан китептерди тандап алуунун 10*9=90 варианты бар. Ушул эле сыяктуу геометриядан 20*19=380 жол менен тандап алууга болот. Маселенин шарты боюнча бир предметке тийиштүү эки китепти тандап алуу керек. Алардын кайсы предметке тийиштүү экендиги бизди кызыктырбайт. Ал же алгебрага, же геометрияга тийиштүү болушу мүмкүн. Мына ошентип, же 1-аракет, же 2-аракет орун алышы мүмкүн. Ошондуктан, кошуунун эрежеси боюнча китептерди тандап алуунун 90+380=470 варианты бар.

Практика жүзүндө орундаштыруунун конкреттүү көрүнүшү эмес, алардын саны көбүрөөк кызыктырат жана n элементтен m элемент боюнча орундаштыруу A_n^m символу менен белгиленет.

Теорема. n элементтен m элемент боюнча орундаштыруунун саны $A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}$ ге барабар, мында $0 \le m \le n$.

Далилдөө. Кандайдыр бир орундаштырууну түзүү үчүн n элементтүү көптүктөн m элементин тандап алып, ал комбинацияны иреттештиребиз. Демек, m элементтен турган көптүктү толтуруу талап кылынат. Бул камтылуучу көптүктүн биринчи элементи катары n элементтин каалаган бирөөсүн тандап ала алабыз. Анда (n-1) элемент калат. Алардын каалаган бирөөсүн камтылуучу көптүктүн 2-элементи катары тандап алсак болот ж.б.у.с. Камтылуучу көптүктүн m-ордуна (n-(m-1)) элементтердин каалаган бирөөсүн тандап ала алабыз. Мына ошентип, көбөйтүүнүн эрежеси боюнча $A_n^m = n(n-1)...(n-(m-1))$ге ээ болобуз. Бул туюнтманы ыңгайлуу формада жазуу үчүн аны (n-m)! га көбөйтүп жана бөлүп, төмөнкүдөй жазсак болот:

$$A_n^m = \frac{n(n-1)...(n-(m-1))(n-m)!}{(n-m)!} = \frac{n!}{(n-m)!}.$$ Теорема далилденди.

Мисалдар.

1) цифралары кайталанбаган канча төрт орундуу сан бар?

Чыгаруу. Ар бир санда цифралардын жайгашуу тартиби чоң мааниге ээ. Ошондуктан, A={0,1,2,3,4,5,6,7,8,9} көптүгүнөн алынган цифраларын төртөн орундаштырабыз $A_{10}^4 = \frac{10!}{6!} = 10*9*8*7 = 5040$, эми нөл менен башталган төрт орундуу сандарды бул сандан чыгарып салуу керек. Ал $A_9^3 = \frac{9!}{6!} = 9*8*7 = 504$ кө барабар. Анда цифралары кайталанбаган $A_{10}^4 - A_9^3 = 5040 - 504 = 4536$ төрт орундуу сан бар.

2) 25 орунга 4 студентти канча жол менен отургузса болот?

Чыгаруу. Изделүүчү сан 25ти 4 төн орундаштырууга барабар: $A_{25}^4 = \frac{25!}{21!} = 25*24*23*22 = 303600$.

3) Студент 8 күндүн ичинде 4 экзаменди тапшырып бүтүшү керек. Аны канча жол менен аткарса болот?

Чыгаруу. $A_8^4 = \frac{8!}{4!} = 1680$ жол менен. Эгер акыркы экзаменди 8 күнү тапшырышы белгилүү болсо, анда $4A_7^3 = \frac{7!}{4!} = 840$ жол менен.

Эми *m*=*n* болгон учурду карайлы.

Def. Эгерде *n* элементтен түзүлгөн комбинация элементтеринин орун алуу тартиби боюнча гана айрымаланышса, анда ал *орун алмаштыруу* деп аталат жана P_n менен белгиленет.

Мисал. {a,b,c}элементтеринен турган көптүк берилсин. Аларды үчтөн кылып орундаштыруунун бардык варианттарын жазалы: abc, acb, bac, bca, cab, cba. Бул орундаштыруу орун алмаштыруу болот (n=m). Мында элементтердин кайталануусу эсепке алынган жок.

Теорема. Ар түрдүү n элементтен турган орун алмаштыруулардын саны *n!*, б.а. $P_n = n!$ га барабар.

Далилдөө. Орун алмаштыруу орундаштыруунун n=m болгон жекече учуру болгондуктан, $P_n = A_n^n = \frac{n!}{0!} = n!$ болот.

Мисалдар.

1) 4 китепти катары менен жайгашкандай кылып 9 китепти канча жол менен жайгаштырууга болот?

Чыгаруу. 4 китепти бириктирип бир китеп катары карайлы. Анда 9 китепти 6 китеп катары карап калабыз. Демек, 6 китеп үчүн орун алмаштырууну эсептейбиз. Ал $P_6=6!=720$ болот. Эми 4 китепти өз ара да орун алмаштырууга болоорун эске алсак, анда $P_4=4!=24$ орун алмаштыруу болот. Ошентип, көбөйтүүнүн эрежесин колдонуп, $P_6*P_4=720*24=17280$ ге ээ болобуз.

2) Жуп сан жуп номерге ээ боло тургандай кылып $\{1,2,\ldots,2n\}$көптүктү канча жол менен иреттесе болот?

Чыгаруу. Жуп сандарды жуп номерлерге n! жол менен жайгаштырса болот, себеби жуп номерлердин саны n. ар бир жуп санды жуп номерге жайгаштырган учурда так сандарды так номерлерге n! жол менен жайгаштырса болот. Ошентип, көбөйтүүнүн эрежесин колдонуп, $n!*n!=(n!)^2$ ге ээ болобуз.

Өз алдынча иштөө үчүн мисал-маселелер.

1) n элементтен 2 элементи жанаша турбай тургандай канча орун алмаштырууларды түзсө болот?

2) Шахмат доскасында бири бирин урбай тургандай кылып 8 турканы канча жол менен жайгаштырса болот?

3) Кассага 5 адамды канча жол менен кезекке тургузса болот.

4) Берилген эки элементтин арасында r элемент болгон, n элементтен орундаштырууларынын санын тапкыла.

5) Чогулушта 4 адам A,B,C,D сөзгө чыгышы керек. Эгер B, A дан кийин гана сөзгө чыгышы керек болсо, анда аларды канча жол менен ораторлордун тизмесине жайгаштырса болот?

6) n студентти канча жол менен тегерек столго отургузса болот?

7) {1,2,…,n} көптүктү, анын 2ге жана 3кө эселүү болгон сандары тиешелүү түрдө 2ге, 3кө эселүү номерлерге ээ боло тургандай кылып канча жол менен иреттесе болот?

8)Эгер ак кагазды 180^0 ка бурсак, анда 0, 1, 8 цифралары өзгөрбөйт, ал эми 6 жана 9 цифралары бири бирине өтүп, башка цифралар маанисин жоготот. Ак кагазды 180^0 га бурганда мааниси өзгөрбөй турган канча жети орундуу сан бар?

9) $P_1+ 2P_2+\ldots+ nP_n$ туюнтмасын жөнөкөйлөткүлө, мында $P - k$ элементи орун алмаштырууларынын саны.

10) Бир күндүк сабактын жадыбалы 5 ар түрдүү предметтерден турат. 11 предметтен канча жол менен мындай жадыбалдарды түзсө болот?

11) Коммиссиянын курамы төрага, төраганын орун басары жана 5 адамдан турат. Канча жол менен коммиссиянын мүчөлөрү өз ара төрага жана төраганын орун басары кызматтарын бөлүштүрүп алышса болот?

12) 15 адамдан турган тайпадан 4 катышуучуну 800м, 400м, 200м, 100м эстафеталарга тандайт. Спортсмендерди канча жол менен эстафетанын этаптарына бөлүштүрсө болот?

13) Шахмат турниринин катышуучулары ойной турган залда 8 стол бар. Эгер бардык партиялардын катышучулары белгилүү болсо, анда аларды канча жол менен жайгаштырса болот?

14) 0,1,3,5,7 цифраларынын жардамында канча 4 орундуу 5 ке бөлүнө турган санды түзсө болот? Ар бир сан бирдей цифрадан түзүлбөшү керек.

15) 0,1,2,3,4,5, цифраларынан түзүлгөн канча санда 3 цифрасы катышат (сандарда цифралар кайталанышпайт).

16)Бардык цифралары ар түрдүү болгон, 5 орундуу канча телефон номерлерин түзсө болот?

17) 4 бала 6 кыздын ичинен 4 кызды канча жол менен бийге чакырса болот?

18) 0,1,2,3,4,5 цифралардын жардамында (цифралары кайталанбай турган) канча 6 орундуу санды түзсө болот?

19) 6 ар түрдүү китепти 5 балага канча жол менен бөлүштүрсө болот?

20) Автобекетте бош автобуска 30 адам чыкты. Кийинки 16 аялдамада алар канча жол менен түшүшү мүмкүн.

21) 5 студентти канча жол менен 3 параллел тайпаларга бөлүштүрсө болот?

22) Автомобилдин номери 2 тамга, 4 цифрадан түзүлөт. 30 тамга жана 10 цифраны пайдаланып канча ар түрдүү номерлерди түзсө болот?

23) 5 адамды группалык сүрөткө тартуу үчүн аларды канча жол менен катарга тизсе болот?

§5.4. Кайталануучу орундаштыруу жана кайталануучу орун алмаштыруу

Def. Бирдей элементтерди кармаган көптүк *мультикөптүк* деп аталат.

Мисалы $A=\{a,a,b,c,c,d,d,d,d,d\}$.

*Def.*Мультикөптүктүн элементтерин орундаштыруу *кайталануучу орундаштыруу* деп аталат.

Мейли бизге $A=\{a,a,a,b,b,c,d,d,d,d\}$ мультикөптүгү берилсин, анын кайталануучу орундаштырууларын эсептейбиз.

А мультикөптүгүндө a элементи 3, b элементи 2, c элементи 1, d элементи 4 даана. Элементтеринин кайталангандыгын $A=\{3*a,2*b,1*c,4*d\}$көрүнүшүндө да көрсөтсө болот. Эгер элементтерге индекс коюп, $A=\{a_1,a_2,a_3,b_1,b_2,c_1,d_1,d_2,d_3,d_4\}$нын бардык элементтерин ар түрдүү деп эсептесек, анда орундаштыруулардын саны 10! га барабар болот. Бирок индекстерди таштагандан соң алардын көпчүлүгү бирдей болуп калат. Ар бир орундаштыруу 3!2!1!4! жолу кайталанат, себеби a, b, c, d нын индекстерин тиешелүү түрдө 3!, 2!, 1!, 4! жол менен орундаштырса болот. Ошондуктан A көптүгүнүн орундаштырууларынын саны $\frac{10!}{3!2!1!4!}$ га барабар болот.

Аналогиялуу түрдө к $(n_1, n_2,\ldots,n_k)$ түрүндөгү n $(n_1+n_2+\ldots+n_k=n)$предметтин орундаштырууларынын саны $p(n_1,n_2,\ldots,n_k)=\frac{n!}{n_1!n_2!..n_k!}$ га барабар экендиги далилденет.

Андан сырткары кайталануучу орундаштыруу топтоштуруу менен тыгыз байланышкан.б.а. $p(n_1, n_2, \ldots, n_k) = \frac{n!}{n_1! n_2! \ldots n_k!}$ формуланы топтоштуруулардын жардамында келтирип чыгарабыз. Бардык n орундун n_1 ордун 1-типтеги элементтердин орундаштыруулары ээлейт. Аларга $C_n^{n_1}$ жол менен орун тандаса болот. Калган n-n_1 орундан n_2 ордун 2-типтеги элементтер ээлейт, аларга $C_{n-n_1}^{n_2}$ жол менен орун тандаса болот. Бул процессти k-типтеги элементтерге чейин улантып, аларга $C_{n-n_1-\ldots-n_{k-1}}^{n_k}$ жол менен орун тандаса боло тургандыгы келип чыгат. Түз көбөйтүндүнүн эрежесин эске алсак, анда кайталануучу орундашыруулардын саны

$$p(n_1, n_2, \ldots, n_k) = C_n^{n_1} C_{n-n_1}^{n_2} \ldots C_{n-n_1-\ldots-n_{k-1}}^{n_k} = \frac{n!}{n_1! n_2! \ldots n_k!}\text{га} \qquad \text{барар}$$

болот.

Мисал. «алгебра» сөзүнөн тамгалардын орун алмаштыруу менен канча сөз түзсө болот?

Чыгаруу. $p(2а,1л,1г,1е,1б,1р) = \frac{7!}{2!1!1!1!1!1!} = \frac{7!}{2!} = 2520$.

Def. Эгерде n элементтен m элемент боюнча орундаштырууда кээ бир элементтери (же бардыгы) бирдей болсо, анда ал орундаштыруу n элементтен m элемент боюнча *кайталануучу орундаштыруу* деп аталат жана $\tilde{A}_n^m$ менен белгиленет.

Мисал. 1) {a,b,c,d}элементтеринен турган көптүк берилсин. Аларды экиден кылып кайталануучу орундаштыруунун бардык варианттарын жазалы: ab, ac, ad, bc, bd, cd, ba, ca, da, cd, db, dc, aa, bb, cc, dd. Алардын саны 16.

Теорема. n элементтен m элемент боюнча кайталануучу орундаштыруулардын саны $\widetilde{A}_n^m = n^m$ ге барабар.

Далилдөө. n элементтен турган X={$a_1, a_2, \ldots, a_n$}көптүгүн жана m ячейкадан турган клетканы карайбыз:

$a_1, a_2, \ldots, a_n$

1	2	…	m

Биринчи ячейкага X көптүгүнөн бир элементти n жол менен тандаса болот; 2- ячейкага да бир элементти n жол менен тандаса болот; ж.б.у.с; m - ячейкага X көптүгүнөн бир элементти n жол менен тандаса болот. Анда логикалык көбөйтүү эрежеси боюнча n элементтен m элемент боюнча орундаштыруулардын саны: $\underbrace{n * n * \ldots * n}_{m} = n^m$ ге барабар.

Мисалдар.

1) {1,2,3,4,5}сандардын жардамында канча үч орундуу сандарды түзсө болот?

Чыгаруу. Үч орундуу сан $\overline{abc}$ болсун, анда a ны 5 жол менен, b ны 5 жол менен, c ны 5 жол менен тандаса болот. Логикалык көбөйтүү эрежесин пайдалансак: 5^3=125 болот.

2) Беш орундуу сандардын санын тапкыла.

Чыгаруу. Беш орундуу сан $\overline{abcde}$ болсун, анда a ны 9 жол менен, b, c,d,e ны 10 жол менен тандаса болот. Логикалык көбөйтүү эрежесин пайдалансак: $9*10^4$ болот.

Өз алдынча иштөө үчүн мисал-маселелер.

1. «папа» сөзүнөн тамгалардын ордун алмаштыруу менен канча ар түрдүү сөз түзсө болот? Сөздөрдүн бардыгын жазып чыккыла.
2. m+n+s предметти 1-группага m, 2- группага n, 3- группага s предметтен тие тургандай кылып канча жол менен 3 группага бөлүштүрсө болот?
3. 3n ар түрдүү предметти ар бир адамга n предметтен тие тургандай кылып канча жол менен үч адамга бөлсө болот?
4. Эгерде сөздө a тамгасы 2ден көп эмес, b тамгасы бирден көп эмес, c тамгасы 3 дөн көп эмес жолу катышса, анда a,b,c тамгаларынын жардамында беш тамгалуу канча сөз жазса болот?
5. «комбинаторика» сөзүнөн тамгалардын ордун алмаштыруу менен канча ар түрдүү сөз жазса болот?
6. «ананас» сөзүнөн тамгалардын ордун алмаштыруу менен канча ар түрдүү сөз жазса болот?
7. «Миссисипи» сөзүнөн тамгалардын ордун алмаштыруу менен канча ар түрдүү сөз жазса болот?

§5.5. Кайталануучу топтоштуруу

Бизге n - ар түрдүү предметтер берилген болсун. Бул предметтердин ээлементтеринин саны чектелбеген. Эгер жайгаштырууда элементтердин тартибин эске албасак, анда узундугу k га барабар болгон жайгаштыруулардын саны канча? Мындай топтоштуруулар *кайталануучу топтоштуруулар* деп аталат жана $\overline{C}_n^k$ белгиленет.

Теорема. $\overline{C}_n^k = C_{n+k-1}^{n-1} = C_{n+k-1}^k$.

Далилдөө. Мейли бизге берилген n ар түрдүү предметтер – a,b,c,…,d болсун. Бул берилген элементтерден түзүлгөн каалагандай кайталануучу топтоштурууну карайбыз:

cbbcaccdddd…ccabbbbdddd

топтоштурууда элементтердин тартиби эске алынбагандыктан, жогорудагы жайгаштырууну

aa…a|bb…b|cc…c|…|dd…d

көрүнүшүндө жазса болот, бир типтеги элементтер экинчи типтеги элементтер менен вертикал сызыктар менен ажыратылган. Мындай жайгаштыруунун узундугу, вертикал сызыктарды эске алганда, k+(n-1) ге барабар болот (k – жайгаштыруудагы элементтердин саны, (n-1) – вертикал сызыктардын саны).

Демек, жогорудагыга окшош каалагандай жайгаштырууну, вертикал сызыктарды жайгаштыруу үчүн n+k-1 орундан n-1 орунду тандоо менен берсе болот экен. Аны топтоштурунун аныктоосу боюнча C_{n+k-1}^{n-1} жол менен ишке ашырса болот.

Вертикал сызыктардын арасы бирдей түрдөгү элементтер менен толтурулат.

Мисалдар.

1) a,b элементтеринен үчтөн кайталануучу топтоштуруулардын бардыгын жазып чыккыла.

Чыгаруу. Демек n=2, k=3. алар {aab, abb, aaa, bbb}, Алардын саны $\overline{C}_2^3 = C_4^1 = C_4^3 = \frac{4!}{3!} = 4$.

2) Алма бакта үч бала 50 алма териштти. Канча жол менен алмаларды балдар өз ара бөлүштүрүшсө болот?

Чыгаруу. Элементтин типтери - балдар болот (a,b,c: n=3), алардын жардамында узундугу 50 гө барабар болгон жайгаштырууларды түзүп чыгуу керек (к=50). Анда алмаларды өз ара бөлүштүрүүлөрдүн саны $\overline{C}_3^{50} = C_{52}^2 = \frac{52!}{2!50!} = \frac{52*51}{2} = 26*51 = 1326$ ге барабар болот.

Өз алдынча иштөө үчүн мисал-маселелер.

1. a,b,c элементтеринен үчтөн кайталануучу топтоштуруулардын бардыгын жазып чыккыла.
2. Эгерде алма бакта 11 ар түрдүү сорттогу алмалар бар болсо, анда 6 ар түрдүү же бирдей сорттогу алманы канча жол менен тандаса болот?
3. 0, 1, 2, …, r сандарын пайдаланып канча доминонун сөөктөрүн жасаса болот?
4. $x_1+x_2+\ldots+x_m=n$ теңдеме канча оң жана бүтүн тамырга ээ болот?

5. $x_1+x_2+\ldots+x_m \leq n$ барабарсыздык канча терс эмес жана бүтүн чыгарылышка ээ болот ?

6. Ареопаг магазининде 4 фирманын: Bitel, MegaCom, Nexi, Fonex уюлдук телефондору үчүн номерлер сатылууда. Канча жол менен 7 номерди сатып алса болот.

7. Беш студентке 25 китепти канча жол менен бөлүп берсе болот?

§5.6 Ньютондун биному. Полиномиалдык формула

Мектеп курсунан

$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$, $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

экендиги бизге белгилүү.

Ал эми $(a+b)^n$ туюнтманы эсептөөдө кашаа кандай ачылат?

Бул суроого төмөндөгү теорема жооп берет.

Теорема.

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n b^0 + C_n^1 a^{n-1} b^1 + \ldots + C_n^n a^0 b^n \text{ же } (a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k ,$$

бул жерде $C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$.

Бул теорема биномиалдык теорема деп да аталат, C_n^k - биномиалдык коэффициенттер деп аталат. $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k$ формуласы Ньютондун биному деп аталат, бирок бул формула Ньютонга чейин орто азиялык окумуштуулар Омар Хайямга (1048-1131), Гийас ад-Дин Жамшид ал-Кошиге, батыш европада Паскальга белгилүү болгон. Ньютондун салымы бул формуланы бүтүн эмес даража үчүн жалпылаган.

Бул формуланы математикалык индукция принциби менен далилдейбиз:

n=1: $(a+b)^1 = C_1^0 a^1 b^0 + C_1^1 a^{1-1} b^1 = a+b$,барабардык туура;

n=m: $(a+b)^m = \sum_{k=0}^{m} C_m^k a^{m-k} b^k$ (*) барабардыкты туура деп божомолдойбуз;

n=m+1: $(a+b)^{m+1} = \sum_{k=0}^{m+1} C_{m+1}^{k} a^{m+1-k} b^{k}$ барабардыгын (*)ны пайдаланып далилдейбиз.

(*)ны a га анан b га көбөйтүп кошобуз:

$a(a+b)^{m} + b(a+b)^{m} = \sum_{k=0}^{m} C_{m}^{k} a^{m+1-k} b^{k} + \sum_{k=0}^{m} C_{m}^{k} a^{m-k} b^{k+1}$ барабардыктын оң жагын өзгөртүп түзөбүз:

$$(a+b)^{m+1} = a^{m+1} + \sum_{k=1}^{m} C_{m}^{k} a^{m+1-k} b^{k} + \sum_{k=1}^{m} C_{m}^{k-1} a^{m+1-k} b^{k} + b^{m+1} = a^{m+1} + \sum_{k=1}^{m} (C_{m}^{k} + C_{m}^{k-1}) a^{m+1-k} b^{k} +$$

$$+ b^{m+1} = a^{m+1} + \sum_{k=1}^{m} C_{m+1}^{k} a^{m+1-k} b^{k} + b^{k+1} = \sum_{k=0}^{m+1} C_{m+1}^{k} a^{m+1-k} b^{k}$$

Далилдөө мезгилинде биз $C_{m}^{k} + C_{m}^{k-1} = C_{m+1}^{k}$ барабардыгын да далилдедик, бул биномиалдык коэффициенттеринин негизги касиеттеринин бири. Бул касиеттен биномиалдык коэффициенттерди удаалаш үч бурчтук формасында жазууга болот деген тыянак келип чыгат:

				1		1					n=1
			1		2		1				n=2
		1		3		3		1			n=3
	1		4		6		4		1		n=4
1		5		10		10		5		1	n=5
…	…	..	..	..	..	..	..	..	..	…	…

Бул үч бурчтук Паскалдын үч бурчтугу деп аталат.

Паскалдын үч бурчтугундагы n-жолчодо $(a+b)^{n}$ ажыралмасынын коэффициенттери турат.

Ньютондун биномун жалпылаштырабыз:

Def. $$\left(a_1 + a_2 + \ldots + a_k\right)^n = \sum_{\substack{n_1 \geq 0, n_2 \geq 0, \ldots n_k \geq 0 \\ n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n}} \frac{n!}{n_1! n_2! \ldots n_k!} a_1^{n_1} a_2^{n_2} \ldots a_k^{n_k}$$

формуласы *полиномиалдык* формула деп аталат.

Бул формуланы k боюнча математикалык индукция принцибин колдонуп жеңил эле далилдесе болот.

Ньютондун биному полиномиалдык формуланын жеке учуру

(k=2 болгон учур): $\left(a_1 + a_2\right)^n = \sum\limits_{\substack{n_1 \geq 0, n_2 \geq 0 \\ n_1 + n_2 = n}} \frac{n!}{n_1! n_2!} a_1^{n_1} a_2^{n_2}$.

Ньютондун биномун жана полиномиалдык формуланы пайдаланып теңдештиктерди жеңил далилдесе болот.

Мисалдар. Барабардыктарды далилдегиле:

1) $\sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k = 2^n$;

2) $\sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k = 0$;

3) $\sum\limits_{k=1}^{n} k C_n^k = n2^{n-1}$.

Чыгаруу. 1) Ньютондун биномуна $a=1$, $b=1$ деген маанилерди койсок:

$$2^n = (1+1)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k 1^{n-k} 1^k = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \Rightarrow \sum_{k=0}^{n} C_n^k = 2^n;$$

2) Ньютондун биномуна $a=1$, $b=-1$ деген маанилерди койсок:

$$0^n = (1-1)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k 1^{n-k} (-1)^k = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k \Rightarrow \sum_{k=0}^{n} (-1)^n C_n^k = 0;$$

3) Ньютондун биномуна $a=1$, $b=x$ деген маанилерди койсок:

$(1+x)^n = \sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k x^k$ даражалуу катарын алабыз, катардан x боюнча туунду алабыз:

$((1+x)^n)' = n(1+x)^{n-1} = \sum\limits_{k=1}^{n} C_n^k k x^{k-1}$, x=1 деген маанини койуп берилген барабардыкты алабыз.

Өз алдынча иштөө үчүн көнүгүүлөр.

Барабардыктарды далилдегиле.

1) $\sum\limits_{k=2}^{n} k(k-1)C_n^k = n(n-1)2^{n-2}$.

2) $\sum\limits_{k=0}^{n} (2k+1)C_n^k = (n+1)2^n$.

3) $\sum\limits_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1} C_n^k = \frac{1}{n+1}(2^{n+1}-1)$.

4) $\sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{1}{k+1} C_n^k = \frac{1}{n+1}$.

5) $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} C_n^k = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}$.

6) $\sum\limits_{r=0}^{k} C_m^r C_n^{k-r} = C_{m+n}^k$.

7) $\sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^k (C_n^k)^2 = (-1)^n C_{2n}^n$.

8) $\sum\limits_{k=0}^{n} \frac{(2n)!}{(k!)^2((n-k)!)^2} = \left(C_{2n}^n\right)^2$.

9) $\sum\limits_{k=0}^{n} \sum\limits_{r=0}^{n-k} C_n^k C_{n-k}^r = 3^n$.

10) $\sum\limits_{r=k}^{n} (-1)^{k-r} C_n^r = \sum\limits_{r=0}^{k-1} (-1)^{n-1-r} C_n^r$.

11) $\sum\limits_{r=0}^{n-k} C_n^{k+r} C_m^r = C_{n+m}^{n-k}$.

12) $\sum\limits_{k=n}^{m} (-1)^{k-n} C_k^n C_m^k = \begin{cases} 0 & при \ m \neq n, \\ 1 & при \ m = n. \end{cases}$

13) $\left(\sqrt{5}+\sqrt{2}\right)^{20}$ ажыралмасынын эң чоң кошулуучусун тапкыла.

14) x тин кандай маанисинде $(5+3x)^{10}$ ажыралмасынын төртүнчү кошулуучусу эң чоң болот?

15) $\left(2nx+\frac{1}{2nx^2}\right)^{3n}$ ажыралмасынын биномиалдык коэффициенттеринин суммасы 64кө барабар. x ти кармабаган кошулуучуну аныктагыла.

16) $\left(ax+x^{-1/4}\right)^n$ ажыралмасында так номердеги биномиалдык коэффициенттеринин суммасы 512ге барабар. x ти кармабаган кошулуучуну тапкыла.

17) x тин кандай маанисинде $(5+2x)^{16}$ ажыралмасындагы төртүнчү кошулуучу коңшу эки кошулуучудан чоң?

18) Эгер бардык коэффициенттеринин суммасы 4096га барабар болсо, $(a+в)^n$ ажыралмасынын эң чоң коэффициенти канчага барабар?

19) $\left(\sqrt[5]{x^2}-\frac{1}{2\sqrt[6]{x}}\right)^n$ ажыралмасында экинчи жана үчүнчү кошулуучулардын коэффициенттеринин суммасы 25,5 ге барабар болсо, x ти кармабаган мүчөнү жазгыла.

20) Эгер $\left(\sqrt[3]{x}+\frac{1}{x}\right)^n$ ажыралмасында бешинчи кошулуучу x тен көз каранды эмес болсо, A_n^2 ти аныктагыла.

21) $(\frac{1}{\sqrt{2}}+3)^n$ ажыралмада төртүнчү кошулуучунун үчүнчү кошулуучуга болгон катышы $3\sqrt{2}$ ге барабар болушу үчүн n – канча болушу керек($n\in N$).

22) $(1+x)^n$ ажыралмасында x^5 жана x^{12} кошулуучулардын коэффициенттери барабар болсо, n ди тапкыла.

23) $\left(\sqrt{2}+\sqrt[4]{3}\right)^{100}$ ажыралмасы канча рационалдык мүчөлөргө ээ?

24) Полиномиалдык формуладан пайдаланып $(x+y+z)^3$ кашааны ачкыла.

25) $(x+y+z)^7$ туюнтмада $x^2y^3z^2$ кошулуучунун коэффициенти канчага барабар.

26) $(1+y+x)^n$ туюнтмада x^ky^r кошулуучунун коэффициентин тапкыла.

27) $(1+x^5+x^7)^n$ туюнтмада x^{17} жана x^{19} кошулуучунун коэффициенттерин тапкыла.

28) Полиномиалдык ажыралмада бардык коэффициенттердин суммасы k^n га барабар экендигин далилдегиле.

29) Эгер р жөнөкөй сан болсо, анда $C_p^1, C_p^2, ..., C_p^{p-1}$ сандар р га бөлүнө тургандыгын далилдегиле.

30) Эгер р жөнөкөй сан болсо, анда каалаган a бүтүн саны үчүн a^p-a айырмасы p га бөлүнө тургандыгын далилдегиле (Ферманын теоремасы).

31) Полиномиалдык формуланы пайдаланып $(x-y+2z)^4$ тү эсептегиле.

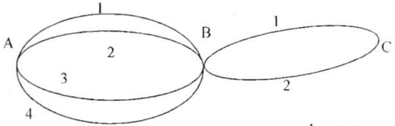
VI. ГРАФТАР ТЕОРИЯСЫНЫН ЭЛЕМЕНТТЕРИ

1. Негизги түшүнүктөр жана аныктоолор

Көпчүлүк учурда ар түрдүү маселелердин көптүгү табигый түрдө чекиттер жана алардын байланышы терымининде формулировкаланат б.а. графтар терымининде чечмеленет.

Мисалдар. 1) А шаарынан В шаарына 4 түрдүү жол менен, ал эми В дан С шаарына 2 түрдүү жол менен барууга болот. А дан В аркылуу С га канча түрдүү жол менен барууга болот?

Чыгаруу. Маселени схеманын жардамында көрсөтөбүз:



1-схема

Схемадан маселенин чечимдери: (1,1), (1,2), (2,1), (2,2), (3,1), (3,2), (4,1), (4,2) лер болуп 8 түрдүү жол болоору көрүнүп турат.

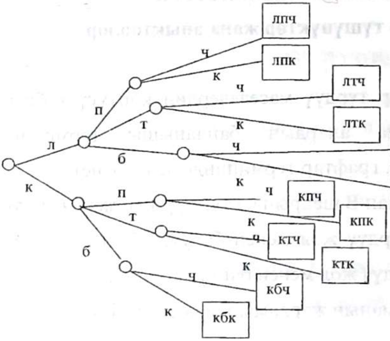
2) Студенттердин ашканасындагы түшкү тамакка

биринчисине: лагман (л), көчө аш (к);

экинчисине: палоо (п), бифштекс (б), тефтели (т);

суусундука болсо: чай (ч), какао (к) даярдалган. Тамактанууга барган студент: биринчи, экинчи тамактарды жана суусундуктарды канча түрдүү жол менен тандап алууга болот?

Чыгаруу. Маселени схеманын жардамында көрсөтөбүз:



2-схема

мүмкүн болгон тандоолордун баары 12=2*3*2.

Def. Каалагандай куру эмес М көптүгүнөн жана анын элементтеринин арасындагы катыштардан турган система (структура) *граф* деп аталат.

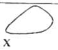
Def. Чектүү граф деп $\Gamma=(X,U,\Phi)$ үчтүгү айтылат, мында X – чектүү сандагы чокулардын көптүгү; U – чектүү сандагы кырлардын (же жаалардын) көптүгү; Ф – инциденттик катышы; $X \cap U=\varnothing$.

Ф – катышы үч орундуу катыш $\Phi(x,u,y)$, $x,y \in X$, $u \in U$, ал аткарылышы да (чын), аткарылбашы да (жалган) мүмкүн жана төмөндөгүдөй шарттарды канаатандырат:

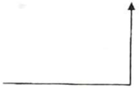
1) $\forall u \in U$, $\exists x,y \in X$, $\Phi(x,u,y)$ – кыр ар дайым чокуларды туташтырат;

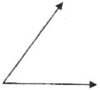
2) $\Phi(x,u,y)$ жана $\Phi(x',u,y') \Rightarrow ((x=x'$ жана $y=y')$ же $(x=y'$ жана $y=x'))$ – кыры бир жуптан ашпаган чокуларга тиешелеш келет.

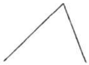
Графтардын графикалык берилиши.

	Графтардын элементтери	Геометрикалык элементтер
1	$x \in X$ – чоку	• - мейкиндиктеги чекит
2	$\Phi(x,u,y)$ жана $\neg\Phi(y,u,x)$ ориентирленген кыр, (жаа)	$x \to y$ – багытталган кесинди
3	$\Phi(x,u,y)$ жана $\Phi(y,u,x)$ ориентирленбеген кыр, (жаа)	x — y – кесинди
4	$\Phi(x,u,x)$ – илмек (петля)	 туюк кесинди

Мисалдар. 3 чокуга жана 2 кырга ээ болгон графтар.







Def. Эгерде $\Gamma=(X,U,\Phi)$, $\Gamma'=(X',U',\Phi)$ графтары үчүн $X' \subseteq X$, $U' \subseteq U$ шарты орун алса, анда $\Gamma'=(X',U',\Phi)$ графы $\Gamma=(X,U,\Phi)$ графынын *камтылуучу графы* деп аталат. $\Gamma' \subseteq \Gamma$ деп белгиленет.

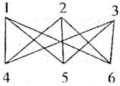
Def. Эгерде графтын ар бир кыры ориентирленген болсо, анда ал *ориентирленген* граф же *орграф* деп аталат:

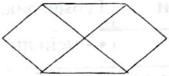
$\forall x \neq y \in X$, $\forall u \in U$ $\Phi(x,u,y) \Rightarrow \neg\, \Phi(y,u,x)$.

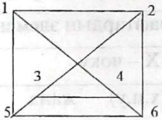
Def. Эгерде $\Gamma_1=(X_1,U_1,\Phi_1)$ жана $\Gamma_2=(X_2,U_2,\Phi_2)$ графтары үчүн $\Phi_2(\varphi(x_1), \psi(u_1), \varphi(y_1))= \Phi_1(x_1, u_1, y_1)$ инциденттик катышы сактала тургандай өз ара бир маанилүү $\varphi: X_1 \to X_2$ жана $\psi: U_1 \to U_2$ тиешелештиктери жашаса, анда $\Gamma_1=(X_1,U_1,\Phi_1)$ жана $\Gamma_2=(X_2,U_2,\Phi_2)$ графтары *изоморфтуу* деп аталат. $\Gamma_1 \cong \Gamma_2$ деп белгиленет.

Аныктоодон изоморфтуу графтарды бирдей сүрөттөсө боло тургандыгы келип чыгат, алар чокулардын белгиси менен гана айрымаланат.

Мисал. үч изоморфтуу графтар.



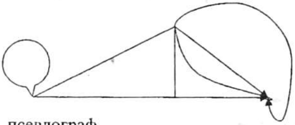




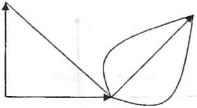
Def. Эгерде графта эселүү кырлар жана илмек катышса, б.а. 2 чокусу бирден ашык кыр менен туташтырылган болсо, анда ал граф *псевдограф* деп аталат.

Илмеги жок болгон псевдограф *мультиграф* деп аталат.

Мисал.



псевдограф

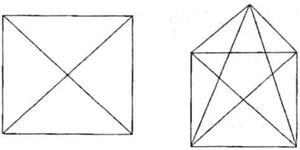


мультиграф

Def. Эгерде ориентирленбеген графтын илмеги жок болсо жана каалаган эки чокусу бирден ашпаган кыр менен туташтырылган болсо, анда ал *жөнөкөй* граф деп аталат.

Def. Эгерде жөнөкөй графтын ар бир жуп чокусу кыр менен туташтырылган болсо, анда ал *толук* граф деп аталат,.

Мындай граф n чокусу менен C_n^2 кырга ээ болот.



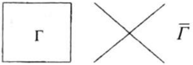
толук ориентирленбеген графтар.

Графтын чокусу жаткан кырларынын саны ал чокусунун даражасы деп аталат. Негизинен графтын чокуларынын даражасы 0, 1, …болушу мүмкүн. n- чокулуу графтын чокуларынын даражасы (n-1) – ден ашпайт.

Def. Эгерде графтын эки чокусун туташтыруучу кырлар табылса, анда ал чокулар *байланышкан чокулар* деп аталат. Тескери учурда байланышпаган чокулар болот.

Def. Г жөнөкөй графынын *толуктоочусу* деп, ошол эле чокулардан турган кырлары Г графын толуктоочулары болон $\overline{\Gamma}$ графын айтабыз.

Мисал. Г – берилген граф, $\overline{\Gamma}$ анын толуктоочусу.



$\Gamma=(X,U,\Phi)$ графта жол чокулардын жана кырлардын удаалаштыгы $x_1u_1x_2u_2x_3…x_nu_nx_{n+1}$ менен аныкталат. U_i кыры x_i жана x_{i+1} чокуларын туташтырат.

- Эгер жолдун бардык кырлары ар түрдүү болсо, анда ал чынжыр деп аталат;
- Туюк чынжыр цикл деп аталат;
- Эгерде $x_1=x_{n+1}$ болсо, анда ал жол туюк деп аталат;
- Эгерде чынжыр бирдей чокуларды кармабаса, анда ал жөнөкөй деп аталат;
- Жөнөкөй туюк чынжыр жөнөкөй цикл деп аталат;
- Графтын бардык чокуларын камтыган жөнөкөй чынжыр Гамильтондун чынжыры деп аталат;

- Графтын бардык чокуларын камтыган жөнөкөй цикл Гамильтондун цикли деп аталат.

Өз алдынча иштөө үчүн мисал-маселелер

1) Эгерде Оштон Бишкекке 3 ар түрдүү жол менен, Бишкектен Москвага 4 ар түрдүү жол менен барууга болсо, анда Оштон Москвага Бишкек аркылуу канча ар түрдүү жол менен барууга болот? Маселени графтардын жардамында чыгаргыла.

2) 10 адамдан турган тайпанын студенттери эрте менен университетке келгенде кол берип көрүшүшкөн. Канча кол берүүлөр болгон?

3) Тайпадагы 30 студенттин бирөөсү калгандарын тааныбайт. Ал эми калган 29уу ар бир калгандарынын экөөсү менен гана тааныш. Бул «тааныштык» катышын графтын жардамында көрсөткүлө.

4) 5 адамды канча ар түрдүү жол менен кезекке тургузса болот?

5) Гамильтондун циклине мисал келтиргиле.

6) Чынжырга жана жөнөкөй чынжырга мисал келтиргиле.

7) 10 студенттин ар бири калгандарынын экөөсү менен гана тааныш болсо, анда алардын арасындагы тааныштык катышын графтын жардамында көрсөткүлө. Пайда болгон граф толук граф болобу?

8) Изоморфтуу графтарга мисал келтиргиле.

9) Эгерде футбол боюнча жарышка 16 команда катышса, алардан 2 ден команда ойноп, жеңгени 1⁄8 финалга чыкса, алардан эки-экиден ойношкондорунун жеңип чыкканы 1⁄4 финалга, алардын 2 ден ойноп жеңгени 1⁄2 финалга чыкса жана акыркы экөөсүнөн алардын жеңгени «чемпион» наамына ээ болсо, анда бул спорттук жарышта бардыгы болуп канча оюн ойнолот? (графтын жардамында көрсөткүлө)

Адабияттар

1. Иванов В.Н. Дискретная математика. Алгоритмы и программы. Учебное пособие.-М.: Лаборатория Базовых Знаний, 2003г.-288с.
2. Нефедов В.Н., Осипова В.А. Курс дискретной математики.-М.:МАИ, 1992г.
3. Новиков Ф.А. Дискретная математика для программистов. Спб.Питер, 2000.-304с.
4. Уилсон Р., Введение теорию графов, Мир, 1977.
5. Яблонский С.В., Введение в дискретную математику, Наука, 1986.
6. Назаров М.Н., Оморалиев А., Апиев А.А., Назаров М.М., Булдун алгебрасы деген эмне? Ош-2001.-38 бет.
7. Назаров М.Н., Турдубаева К.Т. Графтар теориясынын элементтери жана аларды мектеп математикасында пайдалануу мүмкүнчүлүктөрү.// ОшМУнун жарчысы, физ-мат. сериясы №6, 2003ж.-С. 265-271.
8. Ежов И.И, Элементы комбинаторики.-М.: Наука, 1977.
9. Сатаров Ж. Алгебра жана сандар теориясы. Ош-1998ж.I,II бөлүк.

ДИСКРЕТТИК МАТЕМАТИКАНЫН НЕГИЗДЕРИ

ОКУУ КОЛДОНМО

Редактор Борбоева Г.М.
Техн.редактор Ибрагим Дадаев
Корректору Сайкал Карагулова
Компьютердик калыпка салган Нурлан Кыбыраев

Терүүгө берилди. Басууга кол коюлду. №1 офсет кагазы.
Кагаздын форматы 60х84 1/16. «Мектеп» ариби офсет ыкма менен басылды.
5,5 басма табак. нускасы. 500

«Кагаз ресурстары» ЖЧК
Ош шары, Курманжан Датка көчөсү 287
тел.:(3222) 2 52 50